МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин

Алгебра

7

Дидактические материалы

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ - ШКОЛЕ

М. К. Потапов А. В. Шевкин

Алгебра

Дидактические материалы

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

11-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
П64

6+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.
П64 Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — 11-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 96 с. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-045947-1.

Пособие содержит задания для подготовки к самостоятельным работам по основным темам учебника «Алгебра, 7» С. М. Никольского и др., а также самостоятельные и контрольные работы в четырёх вариантах.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Потапов Михаил Константинович
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

Дидактические материалы

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

eb6aabd5-dea0-11e0-acba-001018890642

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*, редактор *Т. Г. Войлокова*, младший редактор *Е. А. Андреенкова*, художественный редактор *О. П. Богомолова*, техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Л. В. Марухно*, корректоры *И. А. Григалашвили, И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 25.07.16. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,81. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 40410.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в АО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru

ISBN 978-5-09-045947-1

Предисловие

Дидактические материалы по курсу алгебры содержат 27 самостоятельных и 7 контрольных работ в четырёх вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ имеются ответы.

Содержание дидактических материалов полностью соответствует учебнику алгебры для 7 класса серии «МГУ — школе» и дополняет его более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах, нацеленных на подготовку к обучению на повышенном уровне. Дидактические материалы можно использовать при работе по любым учебникам, а также для восполнения пробелов в знаниях и самообразования. Представленные здесь самостоятельные работы могут предлагаться учащимся как обучающие для классной или домашней работы.

К каждой самостоятельной работе в первой части книги даны примеры выполнения заданий, аналогичных заданиям из самостоятельных работ, разбор которых существенно повысит результативность выполнения самостоятельных и контрольных работ и усвоение темы в целом.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробный разбор решений заданий, так как имеют целью объяснение выбранных способов действий. А оформление решений учащимися может быть кратким.

Темы «Бесконечные десятичные дроби», «Приближённые вычисления», «Делимость чисел», «Делимость многочленов», «Линейные уравнения с параметром», «Системы трёх линейных уравнений», отмеченные в дидактических материалах звёздочкой, не являются обязательными для изучения в общеобразовательном классе. Они охватывают программу углублённого изучения математики.

Любые из самостоятельных работ учитель может использовать для контроля на отметку. Но при этом следует учесть, что многие самостоятельные и все контрольные работы избыточны по объёму, предполагается, что учитель самостоятельно отберёт из них часть заданий с учётом уровня подготовки учащихся и времени, отводимого на выполнение работы.

Некоторые задания вариантов III и IV несколько сложнее соответствующих заданий вариантов I и II. Так как в классах с углублённым изучением математики контрольных работ должно быть больше, чем в классе, работающем по общеобразовательной программе, то отдельные самостоятельные работы, отмеченные звёздочками, можно провести как контрольные.

РАЗДЕЛ I

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1. Действия с натуральными числами

Пример 1. Вычислим, не пользуясь калькулятором:

а) $98\,765 + 2345$; б) $123\,456 - 56\,789$; в) $67 \cdot 68$;
г) $403 \cdot 306$; д) $1593 : 27$; е) $44\,850 : 65$.

Решение.

а) $\begin{array}{r} +\,98765 \\ 2345 \\ \hline 101110 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} -\,123456 \\ 56789 \\ \hline 66667 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} \times\,67 \\ 68 \\ \hline 536 \\ +\,402 \\ \hline 4556 \end{array}$ г) $\begin{array}{r} \times\,403 \\ 306 \\ \hline 2418 \\ +\,1209 \\ \hline 123318 \end{array}$

д) $\begin{array}{r|l} -\,1593 & 27 \\ \cline{2-2} 135 & 59 \\ \cline{1-1} -\,243 & \\ 243 & \\ \hline 0 & \end{array}$ е) $\begin{array}{r|l} -\,44850 & 65 \\ \cline{2-2} 390 & 690 \\ \cline{1-1} -\,585 & \\ 585 & \\ \hline 0 & \end{array}$

Пример 2. Вычислим, не пользуясь калькулятором:
а) $3926 : 13 - 12 \cdot 21 + 50$; б) $59 \cdot (27 + 27 : 9) - 770$.

Решение.

а) 1) $\begin{array}{r|l} -\,3926 & 13 \\ \cline{2-2} 39 & 302 \\ \cline{1-1} -\,26 & \\ 26 & \\ \hline 0 & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\,12 \\ 21 \\ \hline 12 \\ +\,24 \\ \hline 252 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\,302 \\ 252 \\ \hline 50 \end{array}$ 4) $50 + 50 = 100$.

б) 1) $27 : 9 = 3$; 2) $27 + 3 = 30$;
3) $\begin{array}{r} \times\,59 \\ 30 \\ \hline 1770 \end{array}$ 4) $1770 - 770 = 1000$.

Пример 3. Придумаем пятизначное число, которое делилось бы:

а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 4440.

Решение. а) Чтобы число делилось на 2, его запись должна оканчиваться на чётную цифру, а чтобы оно делилось ещё и на 9, сумма его цифр должна делиться на 9. Пример: 99 990;

б) чтобы число делилось на 5, его запись должна оканчиваться на 0 или на 5, а чтобы оно делилось ещё и на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Пример: 33 315;

в) чтобы найти пятизначное число, делящееся на 4440, умножим, например, число 4440 на 11, получим 48 840.

Пример 4. Используя свойства арифметических действий, найдём значение числового выражения

$$623 \cdot 81 - 623 \cdot 71 + 10 \cdot 77.$$

Решение. $623 \cdot 81 - 623 \cdot 71 + 10 \cdot 77 = 623 \cdot (81 - 71) + 10 \cdot 77 = 623 \cdot 10 + 10 \cdot 77 = (623 + 77) \cdot 10 = 700 \cdot 10 = 7000.$

Пример 5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдём значение числового выражения $181\,818 : 54 - 818\,181 : 243$.

Решение. Применяя основное свойство частного, разделим делимое и делитель первого частного на 18, а второго — на 81:

$$181\,818 : 54 - 818\,181 : 243 = 10\,101 : 3 - 10\,101 : 3 = 0.$$

2. Действия с рациональными числами

Пример 1. Вычислим:

а) $\frac{5}{11} + \frac{3}{22}$; б) $\frac{12}{35} - \frac{11}{28}$; в) $-\frac{2}{13} \cdot \frac{39}{40}$; г) $\frac{25}{51} : \frac{15}{17}$;

д) $5\frac{7}{25} + 1\frac{1}{30}$; е) $6\frac{5}{6} - 4\frac{7}{8}$; ж) $1\frac{3}{26} \cdot 2$; з) $8\frac{3}{4} : 25$.

Решение. а) $\frac{5}{11}^{\backslash 2} + \frac{3}{22} = \frac{10}{22} + \frac{3}{22} = \frac{13}{22}$;

б) $\frac{12}{35}^{\backslash 4} - \frac{11}{28}^{\backslash 5} = \frac{48}{140} - \frac{55}{140} = \frac{48 - 55}{140} = -\frac{7}{140} = -\frac{1}{20}$;

в) $-\frac{2}{13} \cdot \frac{39}{40} = -\frac{2 \cdot 39}{13 \cdot 40} = -\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 20} = -\frac{3}{20}$;

г) $\frac{25}{51} : \frac{15}{17} = \frac{25 \cdot 17}{51 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$;

д) $5\frac{7}{25}^{\backslash 6} + 1\frac{1}{30}^{\backslash 5} = 5\frac{42}{150} + 1\frac{5}{150} = 6\frac{47}{150}$;

е) $6\frac{5}{6}^{\backslash 4} - 4\frac{7}{8}^{\backslash 3} = 6\frac{20}{24} - 4\frac{21}{24} = 5 + \frac{44}{24} - 4\frac{21}{24} = 1\frac{23}{24}$;

ж) $1\frac{3}{26} \cdot 2 = \frac{29 \cdot 2}{26} = \frac{29 \cdot 1}{13} = 2\frac{3}{13}$;

з) $8\frac{3}{4} : 25 = \frac{35}{4 \cdot 25} = \frac{7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20}$.

Пример 2. Вычислим:

а) $41{,}34 + 3{,}8$; б) $13{,}2 - 15{,}18$;
в) $2{,}5 \cdot (-0{,}64)$; г) $0{,}42 : 0{,}007$.

Решение.

а) $41{,}34 + 3{,}8 = 41{,}34 + 3{,}80 = 45{,}14$;
б) $13{,}2 - 15{,}18 = -(15{,}18 - 13{,}20) = -1{,}98$;
в) $2{,}5 \cdot (-0{,}64) = -2{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}16 = -10 \cdot 0{,}16 = -1{,}6$;
г) $0{,}42 : 0{,}007 = 420 : 7 = 60$.

Пример 3. Вычислим:

а) $3\frac{1}{12}+4{,}3$; б) $\frac{1}{5}-0{,}5$; в) $-1\frac{3}{5}\cdot 1{,}5$; г) $-0{,}9:\left(-2\frac{1}{4}\right)$.

Решение. а) $3\frac{1}{12}+4{,}3=3\frac{1}{12}^{\backslash 5}+4\frac{3}{10}^{\backslash 6}=3\frac{5}{60}+4\frac{18}{60}=7\frac{23}{60}$;

б) $\frac{1}{5}-0{,}5=0{,}2-0{,}5=-0{,}3$;

в) $-1\frac{3}{5}\cdot 1{,}5=-1{,}6\cdot 1{,}5=-2{,}4$;

г) $-0{,}9:\left(-2\frac{1}{4}\right)=+\frac{9}{10}:\frac{9}{4}=\frac{9\cdot 4}{10\cdot 9}=\frac{4}{10}=0{,}4$.

Пример 4*. Вычислим: $\frac{4{,}8\cdot 6{,}25\cdot 0{,}36}{0{,}125\cdot 3{,}6\cdot 0{,}48}$.

Решение.

$$\frac{4{,}8\cdot 6{,}25\cdot 0{,}36}{0{,}125\cdot 3{,}6\cdot 0{,}48}=\frac{0{,}48\cdot 10\cdot 6{,}25\cdot 0{,}36}{0{,}125\cdot 0{,}36\cdot 10\cdot 0{,}48}=\frac{6{,}25}{0{,}125}=\frac{6250}{125}=50.$$

3*. Бесконечные десятичные дроби

Пример 1. Какая из двух десятичных дробей: 0,71 или 0,72 — является более точным приближением числа $\frac{5}{7}$?

Решение. Для ответа на вопрос задачи сравним числа $\left|\frac{5}{7}-0{,}71\right|$ и $\left|\frac{5}{7}-0{,}72\right|$:

$$\left|\frac{5}{7}-0{,}71\right|=\left|\frac{5}{7}-\frac{71}{100}\right|=\left|\frac{500}{700}-\frac{497}{700}\right|=\frac{3}{700};$$

$$\left|\frac{5}{7}-0{,}72\right|=\left|\frac{5}{7}-\frac{72}{100}\right|=\left|\frac{500}{700}-\frac{504}{700}\right|=\frac{4}{700}.$$

Так как $\frac{3}{700}<\frac{4}{700}$, то десятичная дробь 0,71 является более точным приближением числа $\frac{5}{7}$.

Пример 2. Запишем обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{23}{33}$; в) $\frac{17}{999}$; г) $\frac{10}{3333}$.

Решение. а) $\frac{13}{99}=0{,}(13)$; б) $\frac{23}{33}=\frac{69}{99}=0{,}(69)$;

в) $\frac{17}{999}=0{,}(017)$; г) $\frac{10}{3333}=\frac{30}{9999}=0{,}(0030)$.

- *Замечание 1.* Те же результаты можно получить, разделив числитель дроби на знаменатель уголком.
- *Замечание 2.* Если в числителе дроби цифр меньше, чем девяток в её знаменателе, то при записи периода впереди дописывают нули так, чтобы цифр в периоде стало столько же, сколько девяток в знаменателе дроби.

Пример 3. Сравним числа:

а) 7,8(3) и 7,(83); б) −1,98(7) и −1,9(87).

Решение. а) Так как 7,8(3) = 7,8333... и 7,(83) = 7,8383..., то 7,8(3) < 7,(83);

б) так как 1,98(7) = 1,98777... и 1,9(87) = 1,98787..., то 1,98(7) < 1,9(87), поэтому −1,98(7) > −1,9(87).

Пример 4. Запишем периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(7); б) 0,(14); в) 0,12(7).

Решение.

а) Пусть $x = 0,(7) = 0,777...$, тогда

$10x = 7,777...,$

$10x - x = 7,777... - 0,777...,$

$9x = 7,$

$x = \frac{7}{9}.$

Итак, $0,(7) = \frac{7}{9}$;

б) пусть $x = 0,(14) = 0,1414...$, тогда

$100x = 14,1414...,$

$100x - x = 14,1414... - 0,1414...,$

$99x = 14,$

$x = \frac{14}{99}.$

Итак, $0,(14) = \frac{14}{99}$;

в) пусть $x = 0,12(7) = 0,12777...,$

$100x = 12,777...,$

$1000x = 127,777...,$

$1000x - 100x = 127,777... - 12,777...,$

$900x = 115,$

$x = \frac{115}{900},$

$x = \frac{23}{180}.$

Итак, $0,12(7) = \frac{23}{180}$.

• *Замечание.* При переводе периодической дроби в обыкновенную мы пользовались интуитивно ясным, но недоказанным правилом умножения десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д., поэтому полученный результат нужно проверить, разделив числитель дроби на знаменатель уголком.

Пример 5. Вычислим:

а) $0,(25) + \frac{1}{4}$; б) $0,(4) - 0,(41)$;

в) $-0,(8) \cdot 0,(4)$; г) $-0,4848... + \frac{7}{11}$.

Решение. а) $0,(25)+\frac{1}{4}=\frac{25}{99}+\frac{1}{4}=\frac{100}{396}+\frac{99}{396}=\frac{199}{396}$;

б) $0,(4)-0,(41)=\frac{4}{9}-\frac{41}{99}=\frac{44}{99}-\frac{41}{99}=\frac{3}{99}=\frac{1}{33}$;

в) $-0,(8)\cdot 0,(4)=-\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{8\cdot 4}{9\cdot 9}=-\frac{32}{81}$;

г) $-0,4848...+\frac{7}{11}=-\frac{48}{99}+\frac{63}{99}=\frac{63}{99}-\frac{48}{99}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$.

Пример 6. Вычислим: $\frac{0,(5)\cdot 0,(3)\cdot 0,(14)}{0,(15)\cdot 0,(2)\cdot 0,(7)}$.

Решение. $\frac{0,(5)\cdot 0,(3)\cdot 0,(14)}{0,(15)\cdot 0,(2)\cdot 0,(7)}=\frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{14}{99}}{\frac{15}{99}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}}=\frac{5\cdot 3\cdot 14\cdot 99\cdot 9\cdot 9}{9\cdot 9\cdot 99\cdot 15\cdot 2\cdot 7}=1.$

4*. Приближённые вычисления

Пример 1. Найдём приближение десятичной дроби 4,298 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

Решение. а) $4,298\approx 4,29$ с недостатком;
б) $4,298\approx 4,30$ с избытком;
в) $4,298\approx 4,30$ с округлением.

Пример 2. Округлим число:

а) 3,859 с точностью до сотых;
б) 83,95 с точностью до десятых;
в) 649,8 с точностью до единиц;
г) 649,8 с точностью до десятков;
д) 2731,54 с точностью до сотен.

Решение. а) $3,859\approx 3,86$ с точностью до сотых;
б) $83,95\approx 84,0$ с точностью до десятых;
в) $649,8\approx 650$ с точностью до единиц;
г) $649,8\approx 650=65\cdot 10$ с точностью до десятков;
д) $2731,54\approx 2700=27\cdot 100$ с точностью до сотен.

• *Замечание.* Результат округления в заданиях «г» и «д» записан так, чтобы в записи числа после последней верной цифры ответа не было нулей.

Пример 3. Округлим до второй значащей цифры число:

а) 0,00385; б) 2 013 000.

Решение. а) $0,00385\approx 0,0039$;
б) $2\,013\,000\approx 2\,000\,000=20\cdot 10^5$.

Пример 4. Вычислим приближённо:

а) $a+b$ и $a-b$, если $a=13,529$, $b=-3,(14)$, округлив данные числа и результаты с точностью до одной сотой;

б) $a\cdot b$ и $a:b$, если $a=8,91$, $b=6,(5)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

Решение. а) Сначала округлим числа a и b с точностью до одной сотой:

$$a \approx 13{,}53;\ b = -3{,}1414... \approx -3{,}14.$$

Затем вычислим сумму $a + b$ и разность $a - b$:

$$a + b \approx 13{,}53 + (-3{,}14) = 13{,}53 - 3{,}14 = 10{,}39;$$
$$a - b \approx 13{,}53 - (-3{,}14) = 13{,}53 + 3{,}14 = 16{,}67;$$

б) сначала округлим числа a и b с точностью до второй значащей цифры:

$$a \approx 8{,}9;\ b = 6{,}555... \approx 6{,}6.$$

Затем вычислим произведение $a \cdot b$, частное $a : b$ и округлим полученные результаты до второй значащей цифры:

$$a \cdot b \approx 8{,}9 \cdot 6{,}6 = 58{,}74 \approx 59;$$
$$a : b \approx 8{,}9 : 6{,}6 = 1{,}34... \approx 1{,}3.$$

Пример 5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3{,}14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 25,1 м;

б) площади круга, если его радиус приближённо равен 4,1 м?

Вычислим приближённо длину окружности и площадь круга.

Решение. а) Радиус окружности измерен с точностью до третьей значащей цифры, следовательно, множитель π и произведение должны содержать не больше трёх значащих цифр.

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25{,}1 = 157{,}628 \approx 158 \text{ (м)};$$

б) радиус круга измерен с точностью до второй значащей цифры, следовательно, множители π, R^2 и произведение должны содержать не больше двух значащих цифр.

$$R^2 \approx 4{,}1 \cdot 4{,}1 = 16{,}81 \approx 17 \text{ (м}^2\text{)},$$
$$S = \pi R^2 \approx 3{,}1 \cdot 17 = 52{,}7 \approx 53 \text{ (м}^2\text{)}.$$

5*. Делимость чисел

Пример 1. Пусть a, b и c — натуральные числа. Докажем, что если a делится на b, b делится на c, то a делится на c.

Доказательство. Так как a делится на b, то $a = bn$, где n — натуральное число. Так как b делится на c, то $b = cm$, где m — натуральное число. Но тогда $a = bn = cmn$, где mn — натуральное число. Это означает, что a делится на c, что и требовалось доказать.

Пример 2. Докажем, что если натуральное число a делится и на 2, и на 3, то число a делится на произведение $2 \cdot 3 = 6$.

Доказательство. Так как число a делится на 2, то $a = 2x$, где x — натуральное число. Так как a делится на 3, а 2 на 3 не делится, то число x делится на 3, т. е. $x = 3y$, где y — натуральное число. Но тогда $a = 2 \cdot 3y = 6y$. Это означает, что число a делится на 6, что и требовалось доказать.

Пример 3. Используя алгоритм Евклида, вычислим:

а) НОД (425, 500); б) НОК (425, 500).

Решение. а) Применим алгоритм Евклида для чисел 425 и 500:

$500 = 425 \cdot 1 + 75,$
$425 = 75 \cdot 5 + 50,$
$75 = 50 \cdot 1 + 25,$
$50 = 25 \cdot 2$

(справа показаны вычисления столбиком).

$$\begin{array}{r|l} 500 & \underline{425} \\ \underline{425} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 425 & \underline{75} \\ \underline{375} & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{50} \\ \underline{50} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 50 & \underline{25} \\ \underline{50} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Последний, отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида равен 25, следовательно, НОД $(425, 500) = 25$;

б) так как $425 = 25 \cdot 17$, а $500 = 25 \cdot 20$ и 17 и 20 взаимно простые числа, то наименьшее число, которое делится и на 425, и на 500, содержит множители 25, 17 и 20. Значит, НОК $(425, 500) = 25 \cdot 17 \cdot 20 = 8500$.

Тот же результат можно получить из равенства $a \cdot b = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$:

$$\text{НОК}(425, 500) = \frac{425 \cdot 500}{\text{НОД}(425, 500)} = \frac{425 \cdot 500}{25} = 8500.$$

Пример 4*. Докажем, что числа 111 111 и 111 113 — взаимно простые.

Доказательство. Если числа 111 111 и 111 113 имеют общий делитель, то их разность $111\,113 - 111\,111 = 2$ имеет тот же делитель. Число 2 имеет единственный простой делитель 2, но ни 111 111, ни 111 113 на 2 не делятся, следовательно, числа 111 111 и 111 113 не имеют другого общего делителя, кроме числа 1, т. е. они взаимно простые, что и требовалось доказать.

6. Одночлены

Пример 1. Является ли одночленом выражение:

а) $a + 3ab$; б) $\frac{1}{7}ab$; в) $\frac{5a}{3b}$;

г) 5; д) b; е) 0?

Решение. а) Сумма $a + 3ab$ не является одночленом;

б) $\frac{1}{7}ab$ — одночлен;

в) частное $\frac{5a}{3b}$ не является одночленом;

г) 5 — одночлен;
д) b — одночлен;
е) 0 — одночлен (нулевой одночлен).

Пример 2. Запишем одночлен в стандартном виде, укажем его коэффициент и степень:

а) $\frac{3}{7}a^5 \cdot 2a$; б) $\frac{1}{3}a^2b \cdot \frac{3}{4}ab^2$; в) $\left(\frac{1}{7}ac\right)^2$; г) $-(c^3d^2)^2$.

Решение. а) $\frac{3}{7}a^5 \cdot 2a = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{1}a^5a = \frac{6}{7}a^6$; коэффициент $\frac{6}{7}$, степень 6;

б) $\frac{1}{3}a^2b \cdot \frac{3}{4}ab^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a^2abb^2 = \frac{1}{4}a^3b^3$; коэффициент $\frac{1}{4}$, степень 6;

в) $\left(\frac{1}{7}ac\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot a^2 \cdot c^2 = \frac{1}{49}a^2c^2$; коэффициент $\frac{1}{49}$, степень 4;

г) $-(c^3d^2)^2 = -(c^3)^2 \cdot (d^2)^2 = -c^6d^4$; коэффициент -1, степень 10.

Пример 3. Запишем одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $49c^6d^8$; б) $2\frac{7}{9}c^4d^{12}$.

Решение. а) $49c^6d^8 = 7^2 \cdot (c^3)^2 \cdot (d^4)^2 = (7c^3d^4)^2$;

б) $2\frac{7}{9}c^4d^{12} = \frac{25}{9}c^4d^{12} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot (c^2)^2 \cdot (d^6)^2 = \left(\frac{5}{3}c^2d^6\right)^2$.

Пример 4. Запишем одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $27b^{12}$; б) $3\frac{3}{8}a^3b^{27}$.

Решение. а) $27b^{12} = 3^3 \cdot (b^4)^3 = (3b^4)^3$;

б) $3\frac{3}{8}a^3b^{27} = \frac{27}{8}a^3b^{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot a^3 \cdot (b^9)^3 = \left(\frac{3}{2}ab^9\right)^3$.

Пример 5. Выпишем подобные одночлены:

$$12a^2b,\ 11ab^2,\ 3a^2b,\ -ab,\ -4ab^2.$$

Решение. Подобные одночлены: $12a^2b$ и $3a^2b$, $11ab^2$ и $-4ab^2$, у одночлена $-ab$ нет подобного одночлена.

Пример 6*. Запишем все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 2, a, b не более одного раза.

Решение. Запишем все одночлены, взяв по одному, по два, по три множителя всеми возможными способами:

$$2,\ a,\ b,\ 2a,\ 2b,\ ab,\ 2ab.$$

Всего 7 одночленов.

7. Многочлены

Пример 1. Является ли многочленом выражение:

а) $3a + b - 7ab$; б) $\frac{12}{13}a^2b$; в) $\frac{12}{13a}$; г) 150?

Решение. а) $3a + b - 7ab$ — многочлен;

б) $\frac{12}{13}a^2b$ — многочлен (одночлен является многочленом);

в) $\frac{12}{13a}$ — не является многочленом, так как это не одночлен и не сумма одночленов;

г) 150 — многочлен.

Пример 2. Запишем многочлен в стандартном виде:

а) $7 - 8a + 9a - 12$; б) $13a + 5a^2 - 22a - 13a^2$.

Решение. а) $7 - 8a + 9a - 12 = (9 - 8)a + (7 - 12) = a - 5$;

б) $13a + 5a^2 - 22a - 13a^2 = (5 - 13)a^2 + (13 - 22)a = -8a^2 - 9a$.

Пример 3. Приведём многочлен к стандартному виду и укажем его степень:

а) $\frac{1}{7}a^2 + 12a - 13a$; б) $14a^2 - 3a^2b + a^2b$;

в) $a^3b - 5a \cdot 4a^2b + 3abb - 4bab$; г) $5b^2 \cdot 6b - 6b \cdot 5b^2 - b$.

Решение. а) $\frac{1}{7}a^2 + \underline{12a} - \underline{\underline{13a}} = \frac{1}{7}a^2 + (12 - 13)a = \frac{1}{7}a^2 - a$; степень многочлена 2;

б) $14a^2 \underline{- 3a^2b} \underline{+ a^2b} = (-3 + 1)a^2b + 14a^2 = -2a^2b + 14a^2$; степень многочлена 3;

в) $a^3b - 5a \cdot 4a^2b + 3abb - 4bab = \underline{a^3b} \underline{- 20a^3b} \underline{\underline{+ 3ab^2}} \underline{\underline{- 4ab^2}} = (1 - 20)a^3b + (3 - 4)ab^2 = -19a^3b - ab^2$; степень многочлена 4;

г) $5b^2 \cdot 6b - 6b \cdot 5b^2 - b = \underline{30b^3} \underline{- 30b^3} - b = -b$; степень многочлена 1.

Пример 4. Вместо каждой из букв C и D подберём одночлен так, чтобы выполнялось равенство:

а) $7a + C + 3a = 12b + D$; б) $12a^2 - C + 11a = 3a^2 + D$.

Решение.

а) Приведя подобные члены в левой части равенства, перепишем его в виде $10a + C = 12b + D$. Если $C = 12b$, $D = 10a$, то равенство верно.

Возможно и другое решение: $C = -10a$, $D = -12b$;

б) вычтя из обеих частей равенства по $3a^2$, перепишем его в виде $9a^2 - C + 11a = D$. Если $C = 9a^2$, $D = 11a$, то равенство верно.

Возможно и другое решение: $C = 11a$, $D = 9a^2$.

Пример 5*. Составим все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов x^2, $-2x$, 1 не более одного раза.

Решение. Запишем все многочлены, взяв по одному, по два, по три члена всеми возможными способами:

$$x^2,\ -2x,\ 1,\ x^2+(-2x)=x^2-2x,$$
$$x^2+1,\ -2x+1,\ x^2+(-2x)+1=x^2-2x+1.$$

Всего 7 многочленов.

8. Сложение и вычитание многочленов

Пример 1. Вычислим сумму многочленов:

а) $5x-4y$ и $7x+y$; б) $7-x+x^2$ и $5x-x^2$.

Решение.

а) $(5x-4y)+(7x+y)=5x-4y+7x+y=12x-3y$;

б) $(7-x+x^2)+(5x-x^2)=7-x+x^2+5x-x^2=4x+7$.

Пример 2. Вычислим разность многочленов:

а) $5x+4y$ и $7x-y$; б) $5-4x+3x^2$ и $4x^2-2x-1$.

Решение.

а) $(5x+4y)-(7x-y)=5x+4y-7x+y=-2x+5y$;

б) $(5-4x+3x^2)-(4x^2-2x-1)=5-4x+3x^2-4x^2+2x+$ $+1=-x^2-2x+6$.

Пример 3. Преобразуем выражение в многочлен стандартного вида:

а) $13x^2-(3-5x+x^2)$; б) $5+(-2x+3x^2)+2x$;

в) $x-(5+4x-x^2)+(4-x^2)$;

г) $15+(12x^2-13x)-(14x^2+15)+2x$.

Решение.

а) $13x^2-(3-5x+x^2)=13x^2-3+5x-x^2=12x^2+5x-3$;

б) $5+(-2x+3x^2)+2x=5-2x+3x^2+2x=3x^2+5$;

в) $x-(5+4x-x^2)+(4-x^2)=x-5-4x+x^2+4-x^2=$ $=-3x-1$;

г) $15+(12x^2-13x)-(14x^2+15)+2x=15+12x^2-13x-$ $-14x^2-15+2x=-2x^2-11x$.

Пример 4. Перепишем выражение, изменив знак перед скобкой на противоположный:

а) $2x^2-(3-8x)$; б) $3x+(-x^2+4)$.

Решение.

а) $2x^2-(3-8x)=2x^2+(-3+8x)$;

б) $3x+(-x^2+4)=3x-(x^2-4)$.

Пример 5. Заключим два последних члена многочлена $8-3x+2y-z$ в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

Решение. а) $8-3x+2y-z=8-3x+(2y-z)$;

б) $8-3x+2y-z=8-3x-(-2y+z)$.

Пример 6*. Подберём такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (x - 2x^2) - (x^2 - 3x + 1) + A.$$

Решение. $B = (x - 2x^2) - (x^2 - 3x + 1) + A = x - 2x^2 - x^2 + 3x - 1 + A = -3x^2 + 4x - 1 + A$. Если $A = 3x^2 - 4x + 1$, то $B = 0$.

9. Умножение многочлена на одночлен

Пример 1. Найдём произведение многочлена и одночлена:

а) $5(a - 3)$; б) $a(5 + 2a)$;
в) $0{,}3x(2x - 7)$; г) $-0{,}2x(5x - 4)$.

Решение. а) $5(a - 3) = 5a - 15$; б) $a(5 + 2a) = 5a + 2a^2$;
в) $0{,}3x(2x - 7) = 0{,}6x^2 - 2{,}1x$;
г) $-0{,}2x(5x - 4) = -x^2 + 0{,}8x$.

Пример 2. Запишем произведение многочлена и одночлена в виде многочлена стандартного вида:

а) $2a(a^2 - 5a + 9)$; б) $3a^2(7 - 6a + 5a^2)$;
в) $0{,}3x(10 - x + x^2)$; г) $-5x(0{,}2x - 4)$;
д) $4x(3 - 2x) + 3(2x^2 - x) - 2(x - 3)$.

Решение. а) $2a(a^2 - 5a + 9) = 2a^3 - 10a^2 + 18a$;
б) $3a^2(7 - 6a + 5a^2) = 21a^2 - 18a^3 + 15a^4 = 15a^4 - 18a^3 + 21a^2$;
в) $0{,}3x(10 - x + x^2) = 3x - 0{,}3x^2 + 0{,}3x^3 = 0{,}3x^3 - 0{,}3x^2 + 3x$;
г) $-5x(0{,}2x - 4) = -x^2 + 20x$;
д) $4x(3 - 2x) + 3(2x^2 - x) - 2(x - 3) = 12x - 8x^2 + 6x^2 - 3x - 2x + 6 = -2x^2 + 7x + 6$.

Пример 3. Вынесем за скобки общий множитель:

а) $2x - 12$; б) $5x^2 - 10x + 15$;
в) $7x - 14x^2$; г) $6x^3 - 12x^2 + 18x$.

Решение. а) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
б) $5x^2 - 10x + 15 = 5(x^2 - 2x + 3)$;
в) $7x - 14x^2 = 7x(1 - 2x)$;
г) $6x^3 - 12x^2 + 18x = 6x(x^2 - 2x + 3)$.

Пример 4. Перепишем выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

а) $3(5x - 7) + x(2x - 1)$; б) $x(2x - 3) - 5(-2x + 1)$.

Решение. а) $3(5x - 7) + x(2x - 1) = 3(5x - 7) - x(-2x + 1)$;
б) $x(2x - 3) - 5(-2x + 1) = x(2x - 3) + 5(2x - 1)$.

Пример 5*. Подберём такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если $B = -9x(x - 7) + 5(x - 6) + A$.

Решение. $B = -9x^2 + 63x + 5x - 30 + A = -9x^2 + 68x - 30 + A$. Если $A = 9x^2 - 68x + 30$, то $B = 0$.

10. Умножение многочленов

Пример 1. Вычислим произведение многочленов:

а) $(a+5)(3a+1)$; б) $(a^2+4)(a-3)$;
в) $(x-5)(2x-3)$; г) $(-x-1)(2x-2)$.

Решение. а) $(a+5)(3a+1)=3a^2+15a+a+5=3a^2+16a+5$;
б) $(a^2+4)(a-3)=a^3+4a-3a^2-12=a^3-3a^2+4a-12$;
в) $(x-5)(2x-3)=2x^2-10x-3x+15=2x^2-13x+15$;
г) $(-x-1)(2x-2)=-2x^2-2x+2x+2=-2x^2+2$.

Пример 2. Запишем выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $8-(x+1)(x-2)$; б) $3a^3+(a^2-a)(3a-2)$;
в) $(2-x)(x-1)+(x+1)(x+2)$;
г) $(3x+3)(5-x)-(5x-5)(3x-2)$.

Решение.

а) $8-(x+1)(x-2)=8-(x^2+x-2x-2)=8-x^2-x+2x+$ $+2=-x^2+x+10$;

б) $3a^3+(a^2-a)(3a-2)=3a^3+(3a^3-3a^2-2a^2+2a)=$ $=3a^3+3a^3-3a^2-2a^2+2a=6a^3-5a^2+2a$;

в) $(2-x)(x-1)+(x+1)(x+2)=(2x-x^2-2+x)+$ $+(x^2+x+2x+2)=2x-x^2-2+x+x^2+x+2x+2=6x$;

г) $(3x+3)(5-x)-(5x-5)(3x-2)=(15x+15-3x^2-3x)-$ $-(15x^2-15x-10x+10)=15x+15-3x^2-3x-15x^2+15x+$ $+10x-10=-18x^2+37x+5$.

Пример 3. Вынесем за скобки общий множитель:

а) $5x^3-10x^2$; б) $4(x-1)-x(x-1)$.

Решение. а) $5x^3-10x^2=5x^2(x-2)$;
б) $4(x-1)-x(x-1)=(x-1)(4-x)$.

Пример 4. Разложим на множители выражение:

а) $2(x-5)+x^2-5x$; б) $3x-9-x(x-3)$;
в) $x^3+6x^2-3x-18$; г) $x^3-5x^2-5x+25$.

Решение.

а) $2(x-5)+x^2-5x=2(x-5)+x(x-5)=(x-5)(2+x)$;

б) $3x-9-x(x-3)=3(x-3)-x(x-3)=(x-3)(3-x)=$ $=-(x-3)(x-3)=-(x-3)^2$;

в) $x^3+6x^2-3x-18=x^2(x+6)-3(x+6)=(x+6)(x^2-3)$;

г) $x^3-5x^2-5x+25=x^2(x-5)-5(x-5)=(x-5)(x^2-5)$.

Пример 5*. Представим многочлен x^2-2x-3 в виде произведения двучленов.

Решение. $x^2-2x-3=x^2-3x+x-3=x(x-3)+1(x-3)=$ $=(x-3)(x+1)$.

11. Числовое значение выражения

Пример 1. Вычислим значение выражения:
а) $6(3-a)+5(2a-3)$, если $a=2{,}5$;
б) $2{,}5(a^2+2a)-5(a-2a^2)$, если $a=-0{,}8$;
в) $(5-2x)-(7-3x)+(8-x)$, если $x=2{,}007$.

Решение. а) Если $a=2{,}5$, то $6(3-a)+5(2a-3)=$ $=18-6a+10a-15=4a+3=4\cdot 2{,}5+3=13$;

б) если $a=-0{,}8$, то $2{,}5(a^2+2a)-5(a-2a^2)=2{,}5a^2+5a-$ $-5a+10a^2=12{,}5a^2=12{,}5\cdot(-0{,}8)^2=8$;

в) если $x=2{,}007$, то $(5-2x)-(7-3x)+(8-x)=$ $=5-2x-7+3x+8-x=0\cdot x+6=6$.

• *Замечание.* В случае с заданием «в» говорят, что значение выражения не зависит от значений x, так как при любом значении x значение выражения равно 6.

Пример 2. Найдём значение x, при котором числовое значение выражения $5x-(8x-11)$ равно 2.

Решение. Упростим выражение

$$5x-(8x-11)=5x-8x+11=-3x+11.$$

Значение выражения $-3x+11$ равно 2 лишь при $x=3$. Значит, значение выражения $5x-(8x-11)$ равно 2 при $x=3$.

Пример 3. Найдём числовое значение выражения

$$(3+x)(2-x)-(4-x)(1+x)$$

при $x=-\frac{3}{4}$.

Решение. Если $x=-\frac{3}{4}$, то

$(3+x)(2-x)-(4-x)(1+x)=6+2x-3x-x^2-$ $-(4-x+4x-x^2)=6+2x-3x-x^2-4+x-4x+x^2=$ $=-4x+2=-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2=5$.

Пример 4*. Докажем, что значение выражения

$$(2x-1)(3x-2)-(3x+2)(2x+1)+14x+1$$

не зависит от значений x.

Решение. $(2x-1)(3x-2)-(3x+2)(2x+1)+14x+1=$ $=6x^2-3x-4x+2-(6x^2+4x+3x+2)+14x+1=6x^2-3x-$ $-4x+2-6x^2-4x-3x-2+14x+1=1$ не зависит от значений x.

12. Формулы сокращённого умножения

Пример 1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишем выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(a+2)^2$; б) $(x-3)(x+3)$; в) $(a+3)^3$.

Решение. а) $(a + 2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$;
б) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$;
в) $(a + 3)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 3 + 3 \cdot a \cdot 3^2 + 3^3 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$.

Пример 2. Запишем выражение в виде многочлена:

а) $(a + 3b)^2$; б) $(2a - b)(2a + b)$;
в) $(3x - y)^3$; г) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Решение. а) $(a + 3b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$;
б) $(2a - b)(2a + b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2$;
в) $(3x - y)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot y + 3 \cdot 3x \cdot y^2 - y^3 = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$;
г) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$.

Пример 3. Запишем выражение в виде квадрата или куба двучлена:

а) $x^2 - 6x + 9$; б) $x^2 + 10x + 25$;
в) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; г) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Решение. а) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$;
б) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$;
в) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = (x - 1)^3$;
г) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$.

Пример 4*. Запишем многочлен $x^2 + 2x - 8$ в виде произведения двучленов.

Решение. *I способ.* $x^2 + 2x - 8 = x^2 - 2x + 4x - 8 = x(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(x + 4)$.

II способ. $x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4)$.

13. Разложение многочленов на множители

Пример 1. Разложим на множители многочлен:

а) $a^3 - 4a^2 + 4a$; б) $ab^3 + 4a^2b^2 + 4a^3b$;
в) $7a - b + 7ab - b^2$; г) $6a + 6b - ay - by$;
д) $13a - 13b + 5a^2 - 5ab$; е) $b^3 - b - 4b^2 + 4$.

Решение. а) $a^3 - 4a^2 + 4a = a(a^2 - 4a + 4) = a(a - 2)^2$;
б) $ab^3 + 4a^2b^2 + 4a^3b = ab(b^2 + 4ab + 4a^2) = ab(b + 2a)^2$;
в) $7a - b + 7ab - b^2 = 1(7a - b) + b(7a - b) = (7a - b)(1 + b)$;
г) $6a + 6b - ay - by = 6(a + b) - y(a + b) = (a + b)(6 - y)$;
д) $13a - 13b + 5a^2 - 5ab = 13(a - b) + 5a(a - b) = (a - b) \times (13 + 5a)$;
е) $b^3 - b - 4b^2 + 4 = b(b^2 - 1) - 4(b^2 - 1) = (b^2 - 1)(b - 4) = (b - 1)(b + 1)(b - 4)$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен:

а) $x^2 - 25 - 3ax + 15a$; б) $x^2 + 14x + 13$; в) $x^8 + 4$.

Решение. а) $x^2 - 25 - 3ax + 15a = (x - 5)(x + 5) - 3a(x - 5) = (x - 5)(x + 5 - 3a)$;

б) $x^2 + 14x + 13 = x^2 + x + 13x + 13 = x(x + 1) + 13(x + 1) =$
$= (x + 1)(x + 13);$

в) $x^8 + 4 = x^8 + 4x^4 + 4 - 4x^4 = (x^4 + 2)^2 - (2x^2)^2 =$
$= (x^4 + 2 - 2x^2)(x^4 + 2 + 2x^2) = (x^4 - 2x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 2).$

Пример 3*. Разложим многочлен $x^4 - 37x^2 + 36$ на возможно большее число множителей.

Решение. $x^4 - 37x^2 + 36 = x^4 - x^2 - 36x^2 + 36 = x^2(x^2 - 1) - 36(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 36) = (x - 1)(x + 1)(x - 6)(x + 6).$

14. Алгебраические дроби

Пример 1. Сократим дробь:

а) $\frac{8x^2}{36x^3}$; б) $\frac{5x-15}{4x-12}$; в) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$.

Решение. а) $\frac{8x^2}{36x^3} = \frac{4 \cdot 2 \cdot x^2}{4 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot x} = \frac{2}{9x}$;

б) $\frac{5x-15}{4x-12} = \frac{5(x-3)}{4(x-3)} = \frac{5}{4}$;

в) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$.

Пример 2. Преобразуем дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9}$; б) $-\frac{13x-14}{2x-1}$.

Решение. *I способ.* а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9} = -\frac{-x^2+5x-1}{x^2-9}$;

б) $-\frac{13x-14}{2x-1} = \frac{-13x+14}{2x-1}$.

II способ. а) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-9} = -\frac{x^2-5x+1}{-x^2+9}$;

б) $-\frac{13x-14}{2x-1} = \frac{13x-14}{-2x+1}$.

Пример 3. Приведём дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x-4}$ и $\frac{7}{20-5x}$; б) $\frac{2x}{(x-3)^2}$ и $\frac{6}{x^2-9}$; в) $\frac{2}{2x-1}$ и $\frac{3}{3x+2}$.

Решение. а) $\frac{x}{x-4}^{\backslash 5} = \frac{5x}{5(x-4)}$ и $\frac{7}{20-5x} = \frac{7}{5(4-x)}^{\backslash -1} = \frac{-7}{5(x-4)}$;

б) $\frac{2x}{(x-3)^2}^{\backslash x+3} = \frac{2x(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$ и

$\frac{6}{x^2-9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}^{\backslash x-3} = \frac{6(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}$;

в) $\frac{2}{2x-1}^{\backslash 3x+2} = \frac{2(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)}$ и $\frac{3}{3x+2}^{\backslash 2x-1} = \frac{3(2x-1)}{(3x+2)(2x-1)}$.

Пример 4. Запишем многочлен $2x-5$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) $x+2$; в) x^2+1.

Решение. а) $2x-5=\dfrac{2x-5}{1}$;

б) $2x-5=\dfrac{(2x-5)(x+2)}{x+2}=\dfrac{2x^2-5x+4x-10}{x+2}=\dfrac{2x^2-x-10}{x+2}$;

в) $2x-5=\dfrac{(2x-5)(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^3-5x^2+2x-5}{x^2+1}$.

Пример 5*. Сократим дробь $\dfrac{x^3-125}{2x^2+10x+50}$.

Решение. $\dfrac{x^3-125}{2x^2+10x+50}=\dfrac{(x-5)(x^2+5x+25)}{2(x^2+5x+25)}=\dfrac{x-5}{2}$.

15. Сложение и вычитание алгебраических дробей

Пример 1. Преобразуем выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{3x-7}{x-2}+\dfrac{7x+3}{2-x}$; б) $\dfrac{11-12x}{7x-9}-\dfrac{13x+14}{9-7x}$.

Решение.

а) $\dfrac{3x-7}{x-2}+\dfrac{7x+3}{2-x}^{\backslash -1}=\dfrac{3x-7}{x-2}+\dfrac{-7x-3}{x-2}=\dfrac{3x-7+(-7x-3)}{x-2}=\dfrac{-4x-10}{x-2}$;

б) $\dfrac{11-12x}{7x-9}-\dfrac{13x+14}{9-7x}=\dfrac{11-12x}{7x-9}+\dfrac{13x+14}{7x-9}=\dfrac{11-12x+13x+14}{7x-9}=\dfrac{x+25}{7x-9}$.

Пример 2. Выполним действия:

а) $\dfrac{2x+11}{x+6}+\dfrac{x+7}{x+6}$; б) $\dfrac{10-9x}{3x-5}+\dfrac{8-7x}{5-3x}$;

в) $\dfrac{5x-1}{3x+9}-\dfrac{3x-7}{3x+9}$; г) $\dfrac{2x-1}{5x-y}-\dfrac{3y+2}{y-5x}$.

Решение.

а) $\dfrac{2x+11}{x+6}+\dfrac{x+7}{x+6}=\dfrac{2x+11+x+7}{x+6}=\dfrac{3x+18}{x+6}=\dfrac{3(x+6)}{x+6}=\dfrac{3}{1}=3$;

б) $\dfrac{10-9x}{3x-5}+\dfrac{8-7x}{5-3x}^{\backslash -1}=\dfrac{10-9x}{3x-5}+\dfrac{7x-8}{3x-5}=\dfrac{10-9x+7x-8}{3x-5}=\dfrac{2-2x}{3x-5}$;

в) $\dfrac{5x-1}{3x+9}-\dfrac{3x-7}{3x+9}=\dfrac{5x-1-(3x-7)}{3x+9}=\dfrac{5x-1-3x+7}{3x+9}=\dfrac{2x+6}{3x+9}=\dfrac{2(x+3)}{3(x+3)}=\dfrac{2}{3}$;

г) $\dfrac{2x-1}{5x-y}-\dfrac{3y+2}{y-5x}=\dfrac{2x-1}{5x-y}+\dfrac{3y+2}{5x-y}=\dfrac{2x-1+3y+2}{5x-y}=\dfrac{2x+3y+1}{5x-y}$.

Пример 3*. Найдём многочлен A, для которого верно равенство

$$\frac{3x-4}{5x-6}-\frac{2x-7}{6-5x}=\frac{A}{5x-6}.$$

Решение.

Так как $\frac{3x-4}{5x-6}-\frac{2x-7}{6-5x}=\frac{3x-4}{5x-6}+\frac{2x-7}{5x-6}=\frac{3x-4+2x-7}{5x-6}=\frac{5x-11}{5x-6}$, то $A=5x-11$.

16. Умножение и деление алгебраических дробей

Пример 1. Вычислим произведение:

а) $\frac{7x}{9}\cdot\frac{6}{x^3}$; б) $(x-2)\cdot\frac{x+3}{5x-10}$; в) $\frac{3x+21}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{2x+14}$.

Решение. а) $\frac{7x}{9}\cdot\frac{6}{x^3}=\frac{7x\cdot 6}{9\cdot x^3}=\frac{7\cdot 2}{3\cdot x^2}=\frac{14}{3x^2}$;

б) $(x-2)\cdot\frac{x+3}{5x-10}=\frac{(x-2)(x+3)}{5(x-2)}=\frac{x+3}{5}$;

в) $\frac{3x+21}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{2x+14}=\frac{(3x+21)(x+3)}{(x^2-9)(2x+14)}=\frac{3(x+7)(x+3)}{(x-3)(x+3)\cdot 2(x+7)}=$

$=\frac{3}{2(x-3)}=\frac{3}{2x-6}$.

Пример 2. Вычислим частное:

а) $\frac{4x-8}{x+1}:(3x-6)$; б) $\frac{2x^2-2}{3x-3}:\frac{3x+3}{4x-4}$; в) $\frac{5x+10}{x^2-25}:\frac{x^2+2x}{x-5}$.

Решение.

а) $\frac{4x-8}{x+1}:(3x-6)=\frac{4x-8}{x+1}:\frac{3x-6}{1}=\frac{(4x-8)\cdot 1}{(x+1)(3x-6)}=$

$=\frac{4(x-2)}{(x+1)\cdot 3(x-2)}=\frac{4}{3x+3}$;

б) $\frac{2x^2-2}{3x-3}:\frac{3x+3}{4x-4}=\frac{(2x^2-2)(4x-4)}{(3x-3)(3x+3)}=\frac{2(x^2-1)\cdot 4(x-1)}{3(x-1)\cdot 3(x+1)}=$

$=\frac{8(x^2-1)(x-1)}{9(x^2-1)}=\frac{8(x-1)}{9}=\frac{8x-8}{9}$;

в) $\frac{5x+10}{x^2-25}:\frac{x^2+2x}{x-5}=\frac{(5x+10)(x-5)}{(x^2-25)(x^2+2x)}=\frac{5(x+2)(x-5)}{(x-5)(x+5)\cdot x(x+2)}=$

$=\frac{5}{x(x+5)}=\frac{5}{x^2+5x}$.

Пример 3*. Вычислим: $\frac{2x-2}{3x+3}\cdot\frac{5x-15}{4x-4}:\frac{x-3}{x+1}$.

Решение.

$\frac{2x-2}{3x+3}\cdot\frac{5x-15}{4x-4}:\frac{x-3}{x+1}=\frac{(2x-2)(5x-15)(x+1)}{(3x+3)(4x-4)(x-3)}=\frac{2(x-1)\cdot 5(x-3)(x+1)}{3(x+1)\cdot 4(x-1)(x-3)}=\frac{5}{6}$.

17. Рациональные выражения

Пример 1. Упростим рациональное выражение:

а) $\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)\cdot\dfrac{2x-2}{x^2}$;

б) $(x^2-1)\cdot\left(\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$.

Решение.

а) 1) $x+1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=$
$=\dfrac{x^2-1+1}{x-1}=\dfrac{x^2}{x-1}$;

2) $\dfrac{x^2}{x-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x^2}=\dfrac{x^2\cdot(2x-2)}{(x-1)\cdot x^2}=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$;

б) 1) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}^{\backslash x+1}+\dfrac{1}{x+1}^{\backslash x-1}=\dfrac{x}{x^2-1}+$
$+\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{3x}{x^2-1}$;

2) $(x^2-1)\cdot\dfrac{3x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-1}{1}\cdot\dfrac{3x}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)\cdot 3x}{x^2-1}=3x$.

Пример 2. Выполним действия:

а) $\left(\dfrac{5x-4y}{5x+4y}-\dfrac{5x+4y}{5x-4y}\right):\dfrac{16xy}{25x^2-16y^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{3}{xy}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{x}}{3-4x+5y}:\dfrac{x}{6y}$.

Решение.

а) 1) $\dfrac{5x-4y}{5x+4y}^{\backslash 5x-4y}-\dfrac{5x+4y}{5x-4y}^{\backslash 5x+4y}=\dfrac{(5x-4y)^2}{(5x+4y)(5x-4y)}-\dfrac{(5x+4y)^2}{(5x+4y)(5x-4y)}=$
$=\dfrac{(5x-4y-(5x+4y))(5x-4y+5x+4y)}{25x^2-16y^2}=\dfrac{-80xy}{25x^2-16y^2}$;

2) $\dfrac{-80xy}{25x^2-16y^2}:\dfrac{16xy}{25x^2-16y^2}=\dfrac{-80xy\cdot(25x^2-16y^2)}{(25x^2-16y^2)\cdot 16xy}=-5$;

б) 1) $\dfrac{3}{xy}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{x}=\dfrac{3}{xy}-\dfrac{4x}{xy}+\dfrac{5y}{xy}=\dfrac{3-4x+5y}{xy}$;

2) $\dfrac{\dfrac{3-4x+5y}{xy}}{3-4x+5y}=\dfrac{3-4x+5y}{xy(3-4x+5y)}=\dfrac{1}{xy}$;

3) $\dfrac{1}{xy}:\dfrac{x}{6y}=\dfrac{1\cdot 6y}{xy\cdot x}=\dfrac{6}{x^2}$.

Пример 3*. Выполним действия:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-4x+4}-\frac{x-3}{x^2-4}\right):\left(\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{x-3}{x^2+4x+4}\right).$$

Решение. 1) $\dfrac{x+3}{x^2-4x+4}-\dfrac{x-3}{x^2-4}=\dfrac{x+3}{(x-2)^2}^{\backslash x+2}-\dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}^{\backslash x-2}=$

$$=\frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}-\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{x^2+3x+2x+6-(x^2-3x-2x+6)}{(x-2)^2(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2+3x+2x+6-x^2+3x+2x-6}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{10x}{(x-2)^2(x+2)};$$

2) $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{x-3}{x^2+4x+4}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}^{\backslash x+2}-\dfrac{x-3}{(x+2)^2}^{\backslash x-2}=$

$$=\frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}-\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x^2+3x+2x+6-(x^2-3x-2x+6)}{(x-2)(x+2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+3x+2x+6-x^2+3x+2x-6}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{10x}{(x-2)(x+2)^2};$$

3) $\dfrac{10x}{(x-2)^2(x+2)}:\dfrac{10x}{(x-2)(x+2)^2}=\dfrac{10x(x-2)(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)\cdot 10x}=\dfrac{x+2}{x-2}.$

18. Числовое значение рационального выражения

Пример 1. Найдём значение рационального выражения:

а) $\dfrac{30}{x^2-25}+\dfrac{3}{x-5}$ при $x=305$;

б) $\dfrac{x^2}{x^2-4x+4}-\dfrac{x+2}{x-2}$ при $x=202$;

в) $\dfrac{a^3-27b^3}{a^2+3ab+9b^2}+\dfrac{a^3+27b^3}{a^2-3ab+9b^2}$ при $a=0{,}48$, $b=-17\dfrac{18}{19}$.

Решение. а) При $x=305$

$$\frac{30}{x^2-25}+\frac{3}{x+5}^{\backslash x-5}=\frac{30}{(x-5)(x+5)}+\frac{3(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{30+3x-15}{(x+5)(x-5)}=$$

$$=\frac{3x+15}{(x+5)(x-5)}=\frac{3(x+5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{3}{x-5}=\frac{3}{305-5}=0{,}01;$$

б) при $x=202$

$$\frac{x^2}{x^2-4x+4}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{x+2}{x-2}^{\backslash x-2}=\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-(x^2-4)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-x^2+4}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{4}{(202-2)^2}=\frac{4}{40000}=0{,}0001;$$

в) при $a = 0{,}48,\ b = -17\frac{18}{19}$

$$\frac{a^3-27b^3}{a^2+3ab+9b^2}+\frac{a^3+27b^3}{a^2-3ab+9b^2}=\frac{(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)}{a^2+3ab+9b^2}+$$

$$+\frac{(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)}{a^2-3ab+9b^2}=\frac{a-3b}{1}+\frac{a+3b}{1}=a-3b+a+3b=2a=$$

$$=2\cdot 0{,}48=0{,}96.$$

Пример 2. Преобразуем в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^3-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

и найдём значение полученной дроби: а) при $x=0$; б) при $x=2$.

Решение. Так как

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^3-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}^{\backslash x^2+x+1}-\frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{x-1}{x^2+x+1}^{\backslash x-1}=$$

$$=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x+1-2x-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x+1-2x-x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x}{x^3-1},$$

то

а) при $x=0$ имеем $\frac{x}{x^3-1}=\frac{0}{0-1}=0;$

б) при $x=2$ имеем $\frac{x}{x^3-1}=\frac{2}{2^3-1}=\frac{2}{7}.$

Пример 3*. Докажем, что значение рационального выражения

$$\frac{x-3}{2x-5}-\frac{x+3}{2x+5}+\frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25}$$

одно и то же при каждом значении x, кроме $x=2{,}5$ и $x=-2{,}5$.

Доказательство.

$$\frac{x-3}{2x-5}^{\backslash 2x+5}-\frac{x+3}{2x+5}^{\backslash 2x-5}+\frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25}=\frac{(x-3)(2x+5)}{4x^2-25}-\frac{(x+3)(2x-5)}{4x^2-25}+$$

$$+\frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25}=\frac{2x^2-6x+5x-15}{4x^2-25}-\frac{2x^2+6x-5x-15}{4x^2-25}+\frac{4x^2+2x-25}{4x^2-25}=$$

$$=\frac{2x^2-x-15-(2x^2+x-15)+4x^2+2x-25}{4x^2-25}=$$

$$=\frac{2x^2-x-15-2x^2-x+15+4x^2+2x-25}{4x^2-25}=\frac{4x^2-25}{4x^2-25}=1.$$

То есть значение выражения одно и то же при каждом значении x, кроме $x=2{,}5$ и $x=-2{,}5$.

19. Тождества

Пример 1. Докажем тождество:

а) $\dfrac{x+6}{x-6}-\dfrac{x-6}{x+6}=\dfrac{24x}{x^2-36}$; б) $\dfrac{3}{x^2-6x+9}:\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3}{x^2-3x}$;

в) $\left(x+4+\dfrac{16}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x-4}{x^2}=1$; г) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{x+5}{x-5}\right):\dfrac{x^2+25}{x^2-25}=2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

Доказательство.

а) $\dfrac{x+6}{x-6}^{\backslash x+6}-\dfrac{x-6}{x+6}^{\backslash x-6}=\dfrac{(x+6)^2}{(x-6)(x+6)}-\dfrac{(x-6)^2}{(x+6)(x-6)}=$

$=\dfrac{x^2+12x+36}{x^2-36}-\dfrac{x^2-12x+36}{x^2-36}=\dfrac{x^2+12x+36-(x^2-12x+36)}{x^2-36}=\dfrac{24x}{x^2-36}$,

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x, кроме $x=6$ и $x=-6$;

б) $\dfrac{3}{x^2-6x+9}:\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3}{(x-3)^2}:\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3\cdot(x-3)}{(x-3)^2\cdot x}=\dfrac{3}{(x-3)\cdot x}=\dfrac{3}{x^2-3x}$,

что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x, кроме $x=3$ и $x=0$;

в) $\left(x+4+\dfrac{16}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x-4}{x^2}=\left(\dfrac{x+4}{1}^{\backslash x-4}+\dfrac{16}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x-4}{x^2}=$

$=\left(\dfrac{x^2-16}{x-4}+\dfrac{16}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x-4}{x^2}=\dfrac{x^2}{x-4}\cdot\dfrac{x-4}{x^2}=1$, что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x, кроме $x=4$ и $x=0$;

г) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}^{\backslash x-5}+\dfrac{x+5}{x-5}^{\backslash x+5}\right):\dfrac{x^2+25}{x^2-25}=\left(\dfrac{(x-5)^2}{x^2-25}+\dfrac{(x+5)^2}{x^2-25}\right):\dfrac{x^2+25}{x^2-25}=$

$=\dfrac{x^2-10x+25+x^2+10x+25}{x^2-25}:\dfrac{x^2+25}{x^2-25}=\dfrac{2x^2+50}{x^2-25}:\dfrac{x^2+25}{x^2-25}=$

$=\dfrac{2(x^2+25)(x^2-25)}{(x^2-25)(x^2+25)}=2$, что и требовалось доказать. Обе части данного тождества определены при каждом значении x, кроме $x=5$ и $x=-5$.

Пример 2*. Докажем тождество

$$\left(\frac{x^3-125}{x^2-10x+25}+\frac{x^3+125}{x^2+10x+25}\right)\cdot\frac{x^2-25}{x^3+50x}=2.$$

Доказательство.

1) $\dfrac{x^3-125}{x^2-10x+25}+\dfrac{x^3+125}{x^2+10x+25}=\dfrac{x^3-5^3}{(x-5)^2}+\dfrac{x^3+5^3}{(x+5)^2}=\dfrac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x-5)^2}+$

$$+\frac{(x+5)(x^2-5x+25)}{(x+5)^2}=\frac{x^2+5x+25}{x-5}^{\backslash x+5}+\frac{x^2-5x+25}{x+5}^{\backslash x-5}=$$

$$=\frac{(x^2+5x+25)(x+5)}{x^2-25}+\frac{(x^2-5x+25)(x-5)}{x^2-25}=\frac{x^3+5x^2+25x+5x^2+25x+125}{x^2-25}+$$

$$+\frac{x^3-5x^2+25x-5x^2+25x-125}{x^2-25}=\frac{x^3+10x^2+50x+125+x^3-10x^2+50x-125}{x^2-25}=$$

$$=\frac{2x^3+100x}{x^2-25}=\frac{2(x^3+50x)}{x^2-25};$$

2) $\frac{2(x^3+50x)}{x^2-25}\cdot\frac{x^2-25}{x^3+50x}=\frac{2(x^3+50x)\cdot(x^2-25)}{(x^2-25)\cdot(x^3+50x)}=2$, что и требовалось доказать.

Отметим, что обе части данного тождества определены при каждом значении x, кроме $x=-5$, $x=0$ и $x=5$.

20. Степень с целым показателем

Пример 1. Вычислим:

а) 6^{-2}; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$; в) $(-0{,}2)^{-3}$; г) -10^{-2}; д) $(-0{,}4)^0$.

Решение. а) $6^{-2}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$;

б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3}=1:\frac{3^3}{5^3}=\frac{1\cdot5^3}{3^3}=\frac{5^3}{3^3}=\frac{125}{27}=4\frac{17}{27}$;

в) $(-0{,}2)^{-3}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}=1:\frac{(-1)^3}{5^3}=\frac{1\cdot5^3}{(-1)^3}=-125$;

г) $-10^{-2}=-\frac{1}{10^2}=-\frac{1}{100}=-0{,}01$;

д) $(-0{,}4)^0=1$.

• *Замечание.* По аналогии с заданием «б» можно доказать, что для любых отличных от нуля чисел a и b и любого целого n верно равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$. Этим равенством удобно пользоваться. Например, задание «в» с его помощью решается так:

$$(-0{,}2)^{-3}=\left(\frac{-1}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{-1}\right)^3=\frac{5^3}{(-1)^3}=-125.$$

Пример 2. Упростим выражение:

а) $x^{-5}\cdot x$; б) $x^2:x^{-3}$; в) $\frac{x^2\cdot x^{-4}}{x^{-5}}$.

Решение. а) $x^{-5}\cdot x=x^{-5}\cdot x^1=x^{-5+1}=x^{-4}$;

б) $x^2 : x^{-3} = x^{2-(-3)} = x^{2+3} = x^5$;

в) $\dfrac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-5}} = \dfrac{x^{2+(-4)}}{x^{-5}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^{-2-(-5)} = x^{-2+5} = x^3$.

Пример 3. Упростим выражение

$$\left(\frac{2x-3}{x}\right)^{-3} \cdot (9x^{-2} - 12x^{-1} + 4).$$

Решение.

$$\left(\frac{2x-3}{x}\right)^{-3} \cdot (9x^{-2} - 12x^{-1} + 4) = \left(\frac{x}{2x-3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{9}{x^2} - \frac{12}{x} + 4\right) =$$

$$= \frac{x^3}{(2x-3)^3} \cdot \frac{9 - 12x + 4x^2}{x^2} = \frac{x\,(2x-3)^2}{(2x-3)^2\ (2x-3)} = \frac{x}{2x-3}.$$

Пример 4*. Вычислим: $\dfrac{6^{n+1} \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n}$, где n — любое целое число.

Решение. $\dfrac{6^{n+1} \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n} = \dfrac{6^n \cdot 6 \cdot 5^n}{15^n \cdot 2^n} = \dfrac{(2 \cdot 3)^n \cdot 6 \cdot 5^n}{(3 \cdot 5)^n \cdot 2^n} = \dfrac{2^n \cdot 3^n \cdot 6 \cdot 5^n}{3^n \cdot 5^n \cdot 2^n} = 6$.

21*. Делимость многочленов

Пример 1. Разделим многочлен A на многочлен B, если:

а) $A = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$, $B = x - 2$;

б) $A = x^4 - x^2 + 2x - 8$, $B = x + 2$;

в) $A = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, $B = x^2 + x + 2$.

Решение. Разделим многочлен A на многочлен B уголком, получим:

а)
$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 13x - 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2\phantom{{}+13x-10}} & x^2 - 4x + 5 \\
-4x^2 + 13x\phantom{{}-10} & \\
\underline{-4x^2 + 8x\phantom{{}-10}} & \\
5x - 10 & \\
\underline{5x - 10} & \\
0 &
\end{array}$$

$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x - 2)(x^2 - 4x + 5)$;

б)
$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 0x^3 - x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + 2x^3\phantom{{}-x^2+2x-8}} & x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \\
-2x^3 - x^2\phantom{{}+2x-8} & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2\phantom{{}+2x-8}} & \\
3x^2 + 2x\phantom{{}-8} & \\
\underline{3x^2 + 6x\phantom{{}-8}} & \\
-4x - 8 & \\
\underline{-4x - 8} & \\
0 &
\end{array}$$

$x^4 - x^2 + 2x - 8 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$;

в) $$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 + 3x + 2 & x^2 + x + 2 \\ \underline{x^3 + x^2 + 2x} & x + 1 \\ \phantom{x^3 + {}} x^2 + x + 2 & \\ \phantom{x^3 + {}} \underline{x^2 + x + 2} & \\ \phantom{x^3 + x^2 + x + {}} 0 & \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x + 2)(x + 1).$

Пример 2. С помощью алгоритма Евклида найдём НОД(A, B), если

$$A = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \ B = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \underline{x^3 - 3x^2 + 2x} & x + 1 \\ \phantom{x^3 -{}} x^2 - 7x + 6 & \\ \phantom{x^3 -{}} \underline{x^2 - 3x + 2} & \\ \phantom{x^3 - x^2 {}} -4x + 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & -4x + 4 \\ \underline{x^2 - x} & -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \\ -\underline{2x + 2} & \\ \phantom{x^2 -2x + {}} 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 1)(x^2 - 3x + 2) + (-4x + 4),$$

$$x^2 - 3x + 2 = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(-4x + 4).$$

Последний неравный нулю остаток равен $-4x + 4 = -4(x - 1)$. Следовательно, НОД(A, B) $= x - 1$. Чтобы в этом убедиться, можно разделить многочлены A и B на $x - 1$:

$$A = (x - 1)(x^2 - x - 6), \ B = (x - 1)(x - 2)$$

и убедиться, что $x^2 - x - 6$ не делится на $x - 2$ без остатка:

$$x^2 - x - 6 = (x - 2)(x + 1) - 4.$$

Пример 3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - x^2 - 4x + a$, $B = x^2 + x - 2$?

Решение. Разделим многочлен A на многочлен B уголком, получим

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 4x + a & x^2 + x - 2 \\ \underline{x^3 + x^2 - 2x} & x - 2 \\ -2x^2 - 2x + a & \\ \underline{-2x^2 - 2x + 4} & \\ \phantom{x -2x^2 - 2x + {}} a - 4 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + a = (x^2 + x - 2)(x - 2) + a - 4.$$

Теперь очевидно, что многочлен A делится на многочлен B с остатком 0 лишь при $a = 4$.

22. Линейные уравнения

Пример 1. Решим уравнение:

а) $7x = 2$; б) $-7x = 0$; в) $0x = 7$.

Решение.

а) $7x = 2$;
$x = 2 : 7$;
$x = \frac{2}{7}$;

б) $-7x = 0$;
$x = 0 : (-7)$;
$x = 0$;

в) $0x = 7$;
нет корней.

Пример 2. Решим уравнение:

а) $10x - 9 = 8x + 7$; б) $3x - 4 = 5x + 6$;
в) $3(x - 1) = 7x + 5$; г) $11x - 2(5x - 4) = 7x - 6$.

Решение.

а) $10x - 9 = 8x + 7$;
$10x - 8x - 9 = 7$;
$2x - 9 = 7$;
$2x = 7 + 9$;
$2x = 16$;
$x = 8$;

б) $3x - 4 = 5x + 6$;
$3x - 5x - 4 = 6$;
$-2x - 4 = 6$;
$-2x = 6 + 4$;
$-2x = 10$;
$x = -5$;

в) $3(x - 1) = 7x + 5$;
$3x - 3 = 7x + 5$;
$3x - 7x - 3 = 5$;
$-4x - 3 = 5$;
$-4x = 5 + 3$;
$-4x = 8$;
$x = -2$;

г) $11x - 2(5x - 4) = 7x - 6$;
$11x - 10x + 8 = 7x - 6$;
$x + 8 = 7x - 6$;
$x - 7x + 8 = -6$;
$-6x = -6 - 8$;
$-6x = -14$;
$x = 2\frac{1}{3}$.

Пример 3. Решим уравнение:

а) $6(0{,}2x - 8) = 3(0{,}4x - 15)$;
б) $4(0{,}2x - 0{,}8) = 2(0{,}4x - 1{,}6)$.

Решение.

а) $6(0{,}2x - 8) = 3(0{,}4x - 15)$;
$1{,}2x - 48 = 1{,}2x - 45$;
$1{,}2x - 1{,}2x = 48 - 45$;
$0x = 3$;
нет корней;

б) $4(0{,}2x - 0{,}8) = 2(0{,}4x - 1{,}6)$;
$0{,}8x - 3{,}2 = 0{,}8x - 3{,}2$;
$0{,}8x - 0{,}8x = 3{,}2 - 3{,}2$;
$0x = 0$;
x — любое число.

Пример 4*. Решим уравнение

$$x - (2x - (3x - 4)) = 4x - (3x - (2x + 1)).$$

Решение. $x - (2x - (3x - 4)) = 4x - (3x - (2x + 1));$
$$x - (2x - 3x + 4) = 4x - (3x - 2x - 1);$$
$$x - (-x + 4) = 4x - (x - 1);$$
$$x + x - 4 = 4x - x + 1;$$
$$2x - 4 = 3x + 1;$$
$$2x - 3x = 1 + 4;$$
$$-x = 5;$$
$$x = -5.$$

23*. Линейные уравнения с параметром

Пример 1. Решим уравнение $2x - 3a = 12$ для каждого значения a.

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде
$$2x = 3a + 12.$$

Разделив обе части этого уравнения на 2, получим $x = 1,5a + 6$.

Таким образом, для каждого значения a данное уравнение имеет корень $x = 1,5a + 6$.

Пример 2. При каком значении a уравнение $11x - 3a = 10$ имеет корень $x = 5$?

Решение. Так как число 5 является корнем данного уравнения, то при некотором значении a верно равенство
$$11 \cdot 5 - 3a = 10,$$
из которого найдём это значение a:
$$55 - 3a = 10;$$
$$-3a = -45;$$
$$a = 15.$$

Следовательно, при $a = 15$ данное уравнение имеет корень 5.

Пример 3. При каком значении a уравнения $5x - 2a = 10$ и $3x + 2a = 22$ имеют общий корень? Найдём этот корень.

Решение. Для каждого значения a решим уравнения
$$5x - 2a = 10 \text{ и } 3x + 2a = 22.$$

Первое из этих уравнений имеет корень $\frac{2a+10}{5}$, а второе $\frac{22-2a}{3}$. Найдём значение a, при котором эти корни равны. Для этого решим относительно a уравнение:
$$\frac{2a+10}{5} = \frac{22-2a}{3};$$
$$3(2a + 10) = 5(22 - 2a);$$
$$6a + 30 = 110 - 10a;$$
$$16a = 80;$$
$$a = 5.$$

Так как это уравнение имеет корень $a = 5$, то при $a = 5$ исходные уравнения имеют общий корень. Этот корень равен $\frac{2 \cdot 5 + 10}{5} = 4$.

Пример 4. При каком значении a уравнение $2(x + 5) - ax = 3$ не имеет корней?

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде

$$(2 - a)x = -7.$$

Если $a = 2$, то уравнение имеет вид $0x = -7$, оно не имеет корней. Итак, при $a = 2$ уравнение не имеет корней.

Пример 5. Для каждого значения a решим уравнение $3(x - 2) - ax = 5$.

Решение. Для каждого значения a данное уравнение можно переписать в виде

$$(3 - a)x = 11.$$

1) Если $a = 3$, то уравнение имеет вид $0x = 11$. Оно не имеет корней.

2) Если $a \neq 3$, то уравнение имеет корень $x = \frac{11}{3 - a}$.

Итак, если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 3$, то уравнение имеет корень $x = \frac{11}{3 - a}$.

24. Решение задач с помощью линейных уравнений

Задача 1. Отношение двух чисел равно $3 : 7$, а их разность равна 160. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа $3k$ и $7k$, где k — некоторое число (коэффициент пропорциональности). Составим уравнение:

$$7k - 3k = 160.$$

Решив это уравнение, получим, что $k = 40$. Следовательно, искомые числа равны $3k = 120$ и $7k = 280$.

Ответ. 120 и 280.

Задача 2. Сумма двух чисел равна 300, а разность — 200. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x и $x + 200$. Составим уравнение:

$$x + (x + 200) = 300.$$

Решив это уравнение, получим, что $x = 50$; $x + 200 = 250$. Следовательно, искомые числа равны 50 и 250.

Ответ. 50 и 250.

Задача 3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 300. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим данные числа x, $x+1$ и $x+2$. Составим уравнение:

$$x+(x+1)+(x+2)=300.$$

Решив это уравнение, получим, что $x=99$; $x+1=100$; $x+2=101$. Следовательно, искомые числа равны 99, 100 и 101.

Ответ. 99, 100 и 101.

Задача 4*. На трёх полках стоят книги. На нижней полке книг в 2 раза меньше, чем на двух остальных полках вместе, на средней — в 3 раза меньше, чем на двух остальных полках вместе, а на верхней полке стоит 30 книг. Сколько книг на трёх полках вместе?

Решение. Пусть на средней полке было x книг, тогда на нижней полке было $\frac{x+30}{2}$ книг. Так как на средней полке было в 3 раза меньше книг, чем на двух остальных полках вместе, то если число книг на средней полке увеличить в 3 раза, то получится столько же книг, сколько их стоит на двух остальных полках вместе. Составим уравнение:

$$3x=30+\frac{x+30}{2}.$$

Решив это уравнение, получим, что $x=18$. Следовательно, книг на трёх полках вместе было $30+18+\frac{30+18}{2}=72$.

Ответ. 72 книги.

25. Системы двух линейных уравнений

Пример 1. Является ли пара чисел $(1;\ -3)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases}5x+y=2,\\2x-y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x-5y=19,\\6x+7y=15?\end{cases}$

Решение. а) Подставив в уравнения системы число 1 вместо x и число -3 вместо y, получим

$$5\cdot 1+(-3)=2 \text{ (верно)},\ 2\cdot 1-(-3)=5 \text{ (верно)}.$$

Следовательно, пара чисел $(1;\ -3)$ является решением системы уравнений;

б) подставив в уравнения системы число 1 вместо x и число -3 вместо y, получим

$$4\cdot 1-5\cdot(-3)=19 \text{ (верно)},\ 6\cdot 1+7\cdot(-3)=15 \text{ (неверно)}.$$

Следовательно, пара чисел $(1;\ -3)$ не является решением системы уравнений.

Пример 2. Решим систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x = 18, \\ 2x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$

Решение. а) Из первого уравнения системы найдём $x = 6$, подставив во второе уравнение системы число 6 вместо x, получим уравнение

$$2 \cdot 6 - y = 8,$$

имеющее единственный корень $y = 4$. Следовательно, пара (6; 4) является решением системы уравнений;

б) умножим первое уравнение системы на 3, а второе — на 2:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 4x + 3y = 27, \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \right.$$

получим систему

$$\begin{cases} 9x - 6y = -3, \\ 8x + 6y = 54, \end{cases} \qquad (1)$$

равносильную данной системе.

Заменив в системе (1) первое уравнение суммой двух уравнений, получим систему

$$\begin{cases} 17x = 51, \\ 8x + 6y = 54, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1), а значит, равносильную данной системе.

Решив систему (2), получим, что $x = 3$, $y = 5$. Следовательно, пара (3; 5) является решением системы (2), а значит, и данной системы уравнений.

Пример 3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 5a = 0, \\ x + 2y - 10 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;

б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишем решения системы в виде пар чисел.

Решение. Из первого уравнения системы найдём, что

$$x = ay - 5a,$$

подставив во второе уравнение системы выражение $ay - 5a$ вместо x, получим уравнение

$$ay - 5a + 2y - 10 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(a + 2)(y - 5) = 0. \qquad (3)$$

а) Теперь видно, что при $a = -2$ и любом y равенство (3) верно, следовательно, система уравнений имеет бесконечно много решений:

$$x = -2y - 5 \cdot (-2) = 10 - 2y, \ y \text{ — любое число.}$$

То есть при $a = -2$ решением системы является любая пара чисел $(10 - 2y;\ y)$, где y — любое число;

б) если $a \neq -2$, то из уравнения (3) следует, что $y = 5$, тогда

$$x = 5a - 5a = 0.$$

То есть для каждого числа $a \neq -2$ решением системы является единственная пара чисел вида (0; 5).

26. Решение задач с помощью систем уравнений

Задача 1. Три буханки чёрного хлеба и четыре батона белого хлеба стоят 114 р., а четыре буханки и два батона стоят 102 р. Сколько стоит буханка чёрного хлеба, сколько стоит батон белого хлеба?

Решение. Пусть буханка чёрного хлеба стоит x р., а батон белого хлеба стоит y р. По условиям задачи составим два уравнения:

$$3x + 4y = 114 \text{ и } 4x + 2y = 102.$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 18$, $y = 15$. Следовательно, буханка чёрного хлеба стоит 18 р., а батон белого хлеба стоит 15 р.

Ответ. 18 р., 15 р.

Задача 2. В классе 27 человек. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 69 тетрадей. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Решение. Пусть в классе было x девочек и y мальчиков. По условиям задачи составим два уравнения:

$$x + y = 27 \text{ и } 3x + 2y = 69.$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 15$, $y = 12$. Следовательно, в классе было 15 девочек и 12 мальчиков.

Ответ. 12 мальчиков и 15 девочек.

Задача 3*. На трёх банковских картах имелось 3000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — третья часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Решение. Пусть на первой карте было x р., на второй — y р., тогда на третьей карте было $2(x + y)$ р. Составим первое уравнение:

$$x + y + 2x + 2y = 3000.$$

Так как на первой карте была треть той суммы, что на остальных картах вместе, то составим второе уравнение:

$$x = \frac{1}{3}(y + 2x + 2y).$$

Решив систему этих двух уравнений, получим, что $x = 750$, $y = 250$. Следовательно, на первой карте было 750 р., на второй — 250 р., а на третьей — $2(750 + 250) = 2000$ р.

Ответ. 750 р., 250 р., 2000 р.

27*. Системы трёх линейных уравнений

Пример 1. Является ли тройка чисел (1; 2; 3) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ x - 3y + z = -2, \\ x + y + z = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 4y - z = 5, \\ 2x + z = 4? \end{cases}$

Решение. а) Подставив в уравнения системы число 1 вместо x, число 2 вместо y и число 3 вместо z, получим

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 4 \text{ (верно)}, \ 1 - 3 \cdot 2 + 3 = -2 \text{ (верно)},$$
$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ (верно)}.$$

Следовательно, тройка чисел (1; 2; 3) является решением системы уравнений;

б) подставив в уравнения системы число 1 вместо x, число 2 вместо y и число 3 вместо z, получим

$$1 + 3 \cdot 2 = 7 \text{ (верно)}, \ 4 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ (верно)},$$
$$2 \cdot 1 + 3 = 4 \text{ (неверно)}.$$

Следовательно, тройка чисел (1; 2; 3) не является решением системы уравнений.

Пример 2. Решим систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 22, \\ y - 2z = -15, \\ -3z = -21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 5, \\ x - y - z = 3, \\ x + y - z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ -2x + 3y - 2z = -2, \\ 4x + y - 3z = -17. \end{cases}$

Решение. а) Из третьего уравнения системы найдём, что $z = 7$. Подставив во второе уравнение системы число 7 вместо z, найдём, что $y = -1$. Подставив в первое уравнение системы число -1 вместо y и число 7 вместо z, найдём, что $x = 3$.

Следовательно, решением системы уравнений является тройка чисел (3; -1; 7);

б) чтобы привести исходную систему уравнений к «треугольному» виду (как система в задании «а»), сначала исключим z из второго и третьего уравнений этой системы.

Сложив первое уравнение системы с третьим, получим уравнение
$$2x + 2y = 6.$$

Сложив первое уравнение системы со вторым, получим уравнение
$$2x = 8$$
(неизвестное y уже исключено).

«Треугольная» система
$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x + 2y = 6, \\ 2x = 8 \end{cases} \qquad (1)$$
равносильна исходной системе. Решив систему (1), найдём её единственное решение: (4; −1; 2). Оно и является решением исходной системы;

в) сначала исключим z из второго и третьего уравнений исходной системы. Для этого первое уравнение системы умножим на 2 и сложим со вторым уравнением, получим уравнение
$$4x - y = -6.$$

Теперь первое уравнение системы умножим на 3 и сложим с третьим уравнением, получим уравнение
$$13x - 5y = -23.$$

Исходная система равносильна системе
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 4x - y = -6, \\ 13x - 5y = -23. \end{cases} \qquad (2)$$

Теперь исключим y из третьего уравнения системы (2). Для этого второе уравнение системы (2) умножим на −5 и сложим с третьим уравнением, получим уравнение $-7x = 7$.

Исходная система равносильна системе
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 4x - y = -6, \\ -7x = 7. \end{cases} \qquad (3)$$

Решив систему (3), найдём её единственное решение: (−1; 2; 5). Оно и является решением исходной системы.

• *Замечание.* Решения систем в заданиях «б» и «в» обычно записывают кратко, указывая справа от вертикальной черты числа, на которые умножают уравнения перед сложением:

б) $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x-y-z=3, \\ x+y-z=1; \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x+2y=6, \\ 2x=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=5, \\ x+y=3, \\ x=4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-1, \\ z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-2y+z=-2, \\ -2x+3y-2z=-2, \\ 4x+y-3z=-17; \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ \\ \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z=-2, \\ 4x-y=-6, \\ 13x-5y=-23; \end{cases} \begin{vmatrix} \\ -5 \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z=-2, \\ 4x-y=-6, \\ -7x=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=5. \end{cases}$

При этом знак равносильности систем ($\Leftrightarrow$) часто опускают, но подразумевают его.

Пример 3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+2y+3z=12, \\ ax+2y+z=-3: \end{cases}$$

а) не имеет решений; б) имеет единственное решение?

Решение. Из первого уравнения системы выразим z через x и y:

$$z=2-x-y.$$

Подставив во второе и третье уравнения системы выражение $2-x-y$ вместо z, получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} z=2-x-y, \\ x+2y+6-3x-3y=12, \\ ax+2y+2-x-y=-3. \end{cases} \qquad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) выразим y через x:

$$y=-2x-6.$$

Подставив в третье уравнение системы выражение $-2x-6$ вместо y, перепишем это уравнение в виде

$$(a-3)x=1.$$

Получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} z=2-x-y, \\ y=-2x-6, \\ (a-3)x=1. \end{cases} \qquad (5)$$

а) Исходная система уравнений не имеет решений, если равносильная ей система (5) не имеет решений. Лишь при $a = 3$ система (5) не имеет решений. Поэтому исходная система не имеет решений при $a = 3$;

б) исходная система уравнений имеет единственное решение, если равносильная ей система (5) имеет единственное решение. При каждом $a \neq 3$ система (5) имеет единственное решение:

$$x = \frac{1}{a-3}, \ y = -\frac{2}{a-3} - 6, \ z = \frac{1}{a-3} + 8.$$

Поэтому исходная система имеет единственное решение при каждом $a \neq 3$.

РАЗДЕЛ II

Самостоятельные работы

С—1 Действия с натуральными числами

Вариант I

Вычислите, не пользуясь калькулятором (**1—2**).

1. а) $38\,571 + 2349$; б) $48\,931 - 39\,582$; в) $48 \cdot 53$;
г) $72 \cdot 205$; д) $736 : 23$; е) $7650 : 25$.

2. а) $724 : 4 - 4 \cdot 41 + 1$; б) $53 \cdot (42 + 24 : 6) - 2315$.

3. Придумайте трёхзначное число, которое делилось бы:
а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 150.

4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения

$$57 \cdot 79 - 57 \cdot 69 + 10 \cdot 43.$$

5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$555\,555 : 15 - 222\,222 : 6.$$

Вариант II

Вычислите, не пользуясь калькулятором (**1—2**).

1. а) $47\,672 + 3458$; б) $37\,633 - 29\,365$; в) $57 \cdot 49$;
г) $69 \cdot 302$; д) $768 : 24$; е) $1680 : 35$.

2. а) $714 : 6 - 3 \cdot 36 + 2$; б) $52 \cdot (42 + 24 : 4) - 2314$.

3. Придумайте трёхзначное число, которое делилось бы:
а) на 2 и на 3; б) на 5 и на 9; в) на 120.

4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения

$$48 \cdot 56 - 48 \cdot 46 + 10 \cdot 52.$$

5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$444\,444 : 12 - 333\,333 : 9.$$

Вариант III

Вычислите, не пользуясь калькулятором (**1—2**).

1. а) $88\,765 + 4567$; б) $23\,232 - 16\,789$; в) $59 \cdot 48$;
г) $405 \cdot 504$; д) $15\,652 : 26$; е) $3780 : 45$.

2. а) $3272 : 8 - 6 \cdot 34 + 3$; б) $57 \cdot (72 + 72 : 9) - 2313$.

3. Придумайте четырёхзначное число, которое делилось бы:

а) на 2 и на 9; б) на 5 и на 3; в) на 1500.

4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения

$$607 \cdot 619 - 607 \cdot 608 + 11 \cdot 393.$$

5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$888\,888 : 24 - 666\,666 : 18.$$

Вариант IV

Вычислите, не пользуясь калькулятором (**1—2**).

1. а) $77\,665 + 5476$; б) $32\,323 - 23\,987$; в) $58 \cdot 49$;
г) $506 \cdot 605$; д) $12\,550 : 25$; е) $3520 : 55$.

2. а) $5472 : 9 - 5 \cdot 43 + 4$; б) $58 \cdot (72 + 72 : 8) - 2312$.

3. Придумайте четырёхзначное число, которое делилось бы:

а) на 2 и на 3; б) на 5 и на 9; в) на 1200.

4. Используя свойства арифметических действий, найдите значение числового выражения

$$706 \cdot 548 - 706 \cdot 536 + 12 \cdot 294.$$

5*. Не выполняя вычисления столбиком, найдите значение числового выражения

$$999\,999 : 27 - 777\,777 : 21.$$

С—2 Действия с рациональными числами

Вариант I

Вычислите (**1—4**).

1. а) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$; б) $\frac{11}{15} - \frac{7}{20}$; в) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{20} : \frac{9}{10}$;

д) $2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{6}$; е) $5\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4}$; ж) $4\frac{2}{15} \cdot 5$; з) $7\frac{3}{5} : 19$.

2. а) $4{,}3 + 0{,}48$; б) $3{,}3 - 5{,}4$;
в) $2{,}5 \cdot (-3{,}2)$; г) $0{,}48 : 0{,}006$.

3. а) $2\frac{1}{3} + 1{,}2$; б) $\frac{3}{4} - 0{,}5$;

в) $-1\frac{2}{5} \cdot 2{,}3$; г) $(-0{,}8) : \left(-2\frac{2}{3}\right)$.

4*. $\frac{4{,}9 \cdot 3{,}24 \cdot 0{,}32}{1{,}08 \cdot 0{,}49 \cdot 3{,}2}$.

Вариант II

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$; б) $\frac{23}{30}-\frac{11}{20}$; в) $\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{5}$; г) $\frac{4}{25}:\frac{8}{5}$;

д) $3\frac{3}{5}+2\frac{1}{3}$; е) $6\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}$; ж) $3\frac{3}{8}\cdot 4$; з) $5\frac{3}{7}:19$.

2. а) $3{,}5+0{,}45$; б) $2{,}6-4{,}8$;
в) $(-2{,}4)\cdot(-3{,}5)$; г) $0{,}54:0{,}009$.

3. а) $3\frac{2}{3}+1{,}1$; б) $\frac{2}{5}-0{,}3$;

в) $1\frac{3}{11}\cdot(-2{,}2)$; г) $(-0{,}9):2\frac{1}{4}$.

4*. $\frac{5{,}6\cdot 12\cdot 0{,}39}{3{,}9\cdot 2{,}4\cdot 0{,}56}$.

Вариант III

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}$; б) $\frac{4}{25}-\frac{11}{15}$; в) $-\frac{11}{14}\cdot\frac{21}{22}$; г) $\frac{12}{19}:\frac{9}{38}$;

д) $7\frac{4}{15}+3\frac{11}{12}$; е) $3\frac{5}{12}-2\frac{5}{6}$; ж) $3\frac{3}{13}\cdot 4$; з) $3\frac{7}{9}:17$.

2. а) $5{,}78+0{,}342$; б) $4{,}3-6{,}1$;
в) $2{,}7\cdot(-7{,}5)$; г) $0{,}72:0{,}025$.

3. а) $5\frac{2}{7}+5{,}4$; б) $\frac{2}{9}-0{,}3$;

в) $-1\frac{2}{15}\cdot 1{,}2$; г) $(-2{,}2):\left(-3\frac{2}{3}\right)$.

4*. $\frac{1{,}25\cdot 3{,}2\cdot 4{,}3}{0{,}43\cdot 16\cdot 125}$.

Вариант IV

Вычислите (1—4).

1. а) $\frac{3}{8}+\frac{1}{16}$; б) $\frac{7}{15}-\frac{13}{25}$; в) $-\frac{13}{16}\cdot\frac{20}{39}$; г) $\frac{15}{21}:\frac{12}{35}$;

д) $2\frac{7}{18}+5\frac{13}{24}$; е) $4\frac{5}{18}-2\frac{5}{9}$; ж) $3\frac{3}{25}\cdot 4$; з) $8\frac{1}{6}:7$.

2. а) $7{,}36+0{,}248$; б) $4{,}5-5{,}1$;
в) $(-3{,}5)\cdot(-1{,}8)$; г) $0{,}64:0{,}025$.

3. а) $4\frac{4}{9}+6{,}2$; б) $\frac{3}{7}-0{,}2$;

в) $1\frac{3}{14}\cdot(-2{,}5)$; г) $2{,}8:\left(-4\frac{2}{3}\right)$.

4*. $\frac{1{,}35\cdot 4{,}8\cdot 4{,}7}{0{,}47\cdot 16\cdot 135}$.

С—3* Бесконечные десятичные дроби

Вариант I

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,14 или 0,15 — является более точным приближением числа $\frac{1}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

   а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{41}{99}$; г) $\frac{7}{11}$.
3. Сравните числа:

   а) 3,4(2) и 3,42; б) −5,73 и −5,(73).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,(8); б) 0,(17).
5. Вычислите:

   а) $0,(3)+\frac{1}{2}$; б) $0,(7)-0,(70)$;

   в) $0,(2)\cdot 0,(6)$; г) $0,3636...+\frac{1}{8}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(6)\cdot 0,(7)\cdot 0,(12)}{0,(21)\cdot 0,(3)\cdot 0,(2)}$.

Вариант II

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,28 или 0,29 — является более точным приближением числа $\frac{2}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

   а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{43}{99}$; г) $\frac{4}{11}$.
3. Сравните числа:

   а) 2,5(7) и 2,57; б) −4,35 и −4,(35).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,(5); б) 0,(13).
5. Вычислите:

   а) $0,(4)+\frac{1}{5}$; б) $0,(6)-0,(60)$;

   в) $0,(3)\cdot 0,(4)$; г) $0,4545...+\frac{1}{3}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(7)\cdot 0,(8)\cdot 0,(60)}{0,(56)\cdot 0,(4)\cdot 0,(5)}$.

Вариант III

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,42 или 0,43 — является более точным приближением числа $\frac{3}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

   а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{99}$; г) $\frac{13}{111}$.
3. Сравните числа:

   а) 5,6(2) и 5,(62); б) −3,12(3) и −3,1(23).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,3(2); б) 0,(19).
5. Вычислите:

   а) $0,(71)+\frac{1}{2}$; б) $0,(8)-0,(80)$;

   в) $0,(6)\cdot 0,(4)$; г) $0,7272\ldots+\frac{3}{11}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(56)\cdot 0,(13)\cdot 0,(3)}{0,(39)\cdot 0,(2)\cdot 0,(14)}$.

Вариант IV

1. Какая из двух десятичных дробей: 0,57 или 0,58 — является более точным приближением числа $\frac{4}{7}$?
2. Запишите обыкновенную дробь в виде периодической десятичной дроби:

   а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{99}$; г) $\frac{14}{111}$.
3. Сравните числа:

   а) 6,5(4) и 6,(54); б) −2,73(5) и −2,7(35).
4. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,5(7); б) 0,(16).
5. Вычислите:

   а) $0,(17)+\frac{1}{2}$; б) $0,(5)-0,(50)$;

   в) $0,(7)\cdot 0,(3)$; г) $0,8181\ldots+\frac{2}{11}$.
6. Вычислите: $\frac{0,(63)\cdot 0,(17)\cdot 0,(6)}{0,(51)\cdot 0,(14)\cdot 0,(3)}$.

С—4* Приближённые вычисления

Вариант I

1. Найдите приближение десятичной дроби 5,736 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

   а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

2. Округлите число:

   а) 2,746 с точностью до сотых;
   б) 38,43 с точностью до десятых;
   в) 184,52 с точностью до единиц;
   г) 537,7 с точностью до десятков;
   д) 1642,83 с точностью до сотен.

3. Округлите до второй значащей цифры число:

   а) 0,02946; б) 2 496 000.

4. Вычислите приближённо:

   а) $a+b$ и $a-b$, если $a=12,537$, $b=6,(28)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
   б) $a \cdot b$ и $a:b$, если $a=2,43$, $b=1,(3)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3,14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

   а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 3,25 м;
   б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,4 м?

   Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант II

1. Найдите приближение десятичной дроби 3,825 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

   а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

2. Округлите число:

   а) 4,274 с точностью до сотых;
   б) 53,84 с точностью до десятых;
   в) 618,45 с точностью до единиц;
   г) 353,7 с точностью до десятков;
   д) 8164,28 с точностью до сотен.

3. Округлите до второй значащей цифры число:

   а) 0,09463; б) 4 925 000.

4. Вычислите приближённо:

а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 16{,}253$, $b = 3{,}(62)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;

б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 6{,}24$, $b = 3{,}(1)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3{,}14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 3,22 м;

б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,5 м?

Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант III

1. Найдите приближение десятичной дроби 8,395 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

2. Округлите число:

а) 8,427 с точностью до сотых;
б) 45,38 с точностью до десятых;
в) 361,84 с точностью до единиц;
г) 735,3 с точностью до десятков;
д) 2816,42 с точностью до сотен.

3. Округлите до третьей значащей цифры число:

а) 0,09495; б) 4 393 600.

4. Вычислите приближённо:

а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 4{,}625$, $b = -5{,}(6)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;

б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 5{,}62$, $b = 2{,}(5)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3{,}14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 4,58 м;

б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,6 м?

Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

Вариант IV

1. Найдите приближение десятичной дроби 7,926 с точностью до единицы второго разряда после запятой:

   а) с недостатком; б) с избытком; в) с округлением.

2. Округлите число:

   а) 4,842 с точностью до сотых;
   б) 74,53 с точностью до десятых;
   в) 636,18 с точностью до единиц;
   г) 473,5 с точностью до десятков;
   д) 5281,64 с точностью до сотен.

3. Округлите до третьей значащей цифры число:

   а) 0,03796; б) 3 364 700.

4. Вычислите приближённо:

   а) $a + b$ и $a - b$, если $a = 2{,}537$, $b = -5{,}(28)$, округлив данные числа с точностью до одной сотой;
   б) $a \cdot b$ и $a : b$, если $a = 8{,}43$, $b = 3{,}(2)$, округлив данные числа и результаты с точностью до второй значащей цифры.

5*. Из справочника выписали приближение числа $\pi \approx 3{,}14159265$. Сколько первых цифр числа π надо взять для приближённого вычисления:

   а) длины окружности, если её радиус приближённо равен 4,85 м;
   б) площади круга, если его радиус приближённо равен 1,7 м?

   Вычислите приближённо длину окружности и площадь круга.

С—5* Делимость чисел

Вариант I

1. Докажите, что если каждое из двух чисел a и b делится на число c, то их сумма тоже делится на число c.

2. Докажите признак делимости на 4: число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 4, если либо число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4, либо $a_0 = a_1 = 0$. (Пример: число 67 912 делится на 4, так как число 12 делится на 4; число 67 900 делится на 4, так как запись числа оканчивается на два нуля.)

3. Вычислите: а) НОД (252, 180); б) НОК (252, 180).

4*. Докажите, что числа 333 333 и 333 331 взаимно простые.

Вариант II

1. Докажите, что если каждое из двух чисел a и b делится на число c, то их разность тоже делится на число c.
2. Докажите признак делимости на 25: число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 25, если либо число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 25, либо $a_0 = a_1 = 0$. (Пример: число 67 975 делится на 25, так как число 75 делится на 25; число 67 900 делится на 25, так как запись числа оканчивается на два нуля.)
3. Вычислите:

   а) НОД (264, 231); б) НОК (264, 231).

4*. Докажите, что числа 555 555 и 555 553 взаимно простые.

Вариант III

1. Докажите, что если число a делится на число c, а число b не делится на число c, то их сумма не делится на число c.
2. Докажите признак делимости на 8: число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 8, если либо число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8, либо $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. (Пример: число 67 912 делится на 8, так как число 912 делится на 8; число 679 000 делится на 8, так как запись числа оканчивается на три нуля.)
3. Вычислите:

   а) НОД (868, 620); б) НОК (868, 620).

4*. Докажите, что числа 777 777 и 777 773 взаимно простые.

Вариант IV

1. Докажите, что если число a делится на число c, а число b не делится на число c, то их разность не делится на число c.
2. Докажите признак делимости на 125: число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 125, если либо число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 125, либо $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. (Пример: число 67 875 делится на 125, так как число 875 делится на 125; число 678 000 делится на 125, так как запись числа оканчивается на три нуля.)
3. Вычислите:

   а) НОД (875, 750); б) НОК (875, 750).

4*. Докажите, что числа 999 999 и 999 995 взаимно простые.

С–6 Одночлены

Вариант I

1. Является ли одночленом выражение:

а) $a + b^2$; б) $\frac{2}{3}ab$; в) $\frac{2x}{a}$; г) -8; д) a; е) 0?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $5a^3 \cdot \frac{1}{3}a^3$; б) $8ab \cdot \frac{1}{8}a^2b$; в) $\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$; г) $-(a^2b)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $4a^4b^2$; б) $2\frac{1}{4}a^2b^{20}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $8a^{12}b^{21}$; б) $\frac{1}{27}a^{18}b^9$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$7ab;\ 7ab^2;\ 4a^2b;\ -ab;\ -b;\ 4ab.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 3, x, y не более одного раза.

Вариант II

1. Является ли одночленом выражение:

а) $\frac{1}{2}a^3$; б) $8 + ab$; в) $\frac{x}{2y}$; г) -10; д) ab; е) 0?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $3c^2 \cdot \frac{1}{3}c^3$; б) $5cd \cdot \frac{1}{4}c^2d^2$; в) $\left(\frac{1}{3}cd\right)^2$; г) $-(c^4d)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $9c^6d^4$; б) $6\frac{1}{4}c^{24}d^2$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $64c^9d^{24}$; б) $\frac{1}{8}c^{12}d^6$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$5c^2;\ cd;\ 3c^2;\ -d;\ c;\ -2cd^2;\ -c^2.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 4, m, n не более одного раза.

Вариант III

1. Является ли одночленом выражение:

а) $a-\frac{1}{3}a^2$; б) $5a\cdot\frac{1}{2}b^4$; в) -17; г) $-\frac{x^2}{y}$; д) a^3b; е) 0?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $14b^2\cdot\frac{2}{21}b^4$; б) $24ab^2\cdot\frac{1}{8}a^3b$; в) $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^2$; г) $-(a^4b^3)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $49a^4b^{12}$; б) $1\frac{7}{9}a^{26}b^{22}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $64a^{12}b^{27}$; б) $-3\frac{3}{8}a^{21}b^{36}$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$14ab;\ 20a^3b^2;\ 6a^3b^2;\ -ab;\ -24ab.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 5, a, b, c не более одного раза.

Вариант IV

1. Является ли одночленом выражение:

а) $a+\frac{1}{2}a^2$; б) $11a^2\cdot\frac{1}{3}b$; в) -18; г) $-\frac{x}{y^2}$; д) ab^3; е) 0?

2. Запишите одночлен в стандартном виде, укажите его коэффициент и степень:

а) $24c^2\cdot\frac{3}{8}c^3$; б) $5cd\cdot\frac{1}{4}c^2d^2$; в) $\left(\frac{3}{4}cd^2\right)^2$; г) $(-c^5d^2)^3$.

3. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $81c^{16}d^4$; б) $12\frac{1}{4}c^{20}d^{32}$.

4. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $125c^{18}d^{21}$; б) $-2\frac{10}{27}c^{12}d^{33}$.

5. Выпишите подобные одночлены:

$$15c^3d;\ cd;\ 12c^3d;\ -6cd;\ -2c^3d.$$

6*. Запишите все ненулевые одночлены стандартного вида, используя любой из множителей 6, x, y, z не более одного раза.

Многочлены

Вариант I

1. Является ли многочленом выражение:

а) $a + b - 2a$; б) $\frac{2}{3}ab$; в) $\frac{2}{3a}$; г) 5?

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

а) $3 - 2a + 5a - 11$; б) $3a + a^2 + 2a - 3a^2$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

а) $\frac{3}{4}a^2 + 3a - a$; б) $8a^2 - a^2b + 3a^2b$;

в) $4a^3b + 5a \cdot 2a^2b + abb - 3bab$; г) $7a^2 \cdot 3a - 4a \cdot 6a^2 - a$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство:

а) $3a + C + 5a = b + D$; б) $6a^2 - C + 3a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $3x^2$, $-2x$, 5 не более одного раза.

Вариант II

1. Является ли многочленом выражение:

а) $a - b + 2b$; б) $\frac{5}{3}ab$; в) $\frac{5}{3b}$; г) 6?

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

а) $-5 + x - 3x + 12$; б) $5x - x^2 - 3x + 4x^2$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

а) $\frac{1}{3}a^2 + 5a - a$; б) $3a^3 + ab - 4ab$;

в) $5a^3b + 4a \cdot 3a^2b + abb - 4bab$; г) $6a^2 \cdot 4a - 5a \cdot 6a^2 + a$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство:

а) $4a + C + 4a = 2b + D$; б) $5a^2 - C + 4a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $5x^2$, $-10x$, 7 не более одного раза.

Вариант III

1. Является ли многочленом выражение:

а) $ab - ba - 2$; б) $-\frac{2}{7}ab$; в) $\frac{2}{7a}$; г) $\frac{2}{7a + b}$; д) -5?

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

а) $5 - 6a + 15a - 12 - a$; б) $6a + a^2 + a - 8a^2$;
в) $7 + 3a - 5a - 7$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

а) $\frac{1}{5}a^2 + 3a - \frac{1}{5}a^2 - a + 4$; б) $5a^2 - ab + ab - 5a^2 + 3$;
в) $6a^3b - 3a \cdot 4a^2b - abb + 7bab$;
г) $5a^2 \cdot 2a - 6a \cdot 6a^2 + a^2$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство (найдите два решения задачи):

а) $5a + C + 3a = 3b + D$; б) $4a^2 - C + 5a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов x^2, $-3x$, 4 не более одного раза.

Вариант IV

1. Является ли многочленом выражение:

а) $ac - ca + 2$; б) $-\frac{5}{7}ab$; в) $\frac{5}{7a}$; г) $\frac{3}{a - 2b}$; д) -6?

2. Приведите многочлен к стандартному виду:

а) $-5 + 8x - 12x + 13 - a$; б) $15x - x^2 + x - 5x^2$;
в) $5 + 8a - 10a - 5$.

3. Приведите многочлен к стандартному виду, укажите его степень:

а) $-\frac{1}{6}a^2 - 4a + a + \frac{1}{6}a^2$; б) $4a - a^2b + a^2b - 4a + 2$;
в) $7a^3b - 3a \cdot 3a^2b - abb + 6bab$;
г) $4a^2 \cdot 3a - 7a \cdot 6a^2 + a^4$.

4. Вместо каждой из букв C и D подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство (найдите два решения задачи):

а) $6a + C + 2a = 4b + D$; б) $3a^2 - C + 6a = a^2 + D$.

5*. Составьте все возможные ненулевые многочлены стандартного вида, используя каждый из одночленов $7x^2$, $-8x$, 3 не более одного раза.

С—8 Сложение и вычитание многочленов

Вариант I

1. Найдите сумму многочленов:

а) $(3x - 2y) + (3x + 2y)$; б) $(4 + x - x^2) + (x^2 - x)$.

2. Найдите разность многочленов:

а) $(4x - y) - (2x + y)$; б) $(5 - x + 3x^2) - (2x^2 - x + 5)$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $3x^2 - (2 + 3x - 5x^2)$; б) $4 + (-x + 5x^2) + 2x$;
в) $x - (4 + 3x - x^2) + (2 - x^2)$;
г) $5 + (2x^2 - x) - (4x^2 + 5) + x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:

а) $x^2 - (2 - 3x)$; б) $5x + (-x + 5)$.

5. Два последних члена многочлена $7 - 2x + 3y - 4z$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

6*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (2x - 3x^2) - (x^2 - 5x + 1) + A.$$

Вариант II

1. Найдите сумму многочленов:

а) $(4x - 3y) + (4x + 3y)$; б) $(3 + 2x - x^2) + (x^2 - x)$.

2. Найдите разность многочленов:

а) $(5x - y) - (5x + y)$; б) $(4 - x + 3x^2) - (2x^2 - x + 4)$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $6y^2 - (-3 + 2y - 2y^2)$; б) $9 + (y^2 - 4) + 5y$;
в) $2y - (5 - 3y^2) + (4 - y^2)$;
г) $6 - (9 - 2y^2) + (6y^2 - 7y + 3) + 7y$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:

а) $2x^2 - (4 - 2x)$; б) $4x + (-2x + 1)$.

5. Два последних члена многочлена $9 - x - 2y + 3z$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

6*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (3x - 2x^2) - (2x^2 - 4x + 2) + A.$$

Вариант III

1. Найдите сумму многочленов:

а) $(5x - 4y) + (5x + 4y)$;
б) $(2 + 3x - 4x^2) + (4x^2 - 3x + 2)$.

2. Найдите разность многочленов:

а) $(6x - 3y) - (6x - 2y)$; б) $(2a + 3) - (2a - 1)$;
в) $(3 - 2x + 3x^2) - (4x^2 - 2x + 3)$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $5x^2 - (3 - 4x - x^2)$; б) $5 + (-4x + 6x^2) + 4x$;
в) $7x - (8 + 4x - 3x^2) + (5 - 3x^2)$;
г) $6 + (2x^2 - 5x) - (4x^2 + 6) + 5x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:

а) $4x^2 - (6 - 5x)$;
б) $6x + (-3x + 4)$.

5. Три последних члена многочлена $12 - x^2 - 3x^3 + 5x^4$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

6*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (4x - x^2) - (3x^2 - 3x + 3) + A.$$

Вариант IV

1. Найдите сумму многочленов:

а) $(6x - 5y) + (6x + 5y)$;
б) $(1 + 4x - 3x^2) + (3x^2 - 4x + 2)$.

2. Найдите разность многочленов:

а) $(7x - 2y) - (7x - 3y)$; б) $(3a + 5) - (3a - 7)$;
в) $(2 - 3x + 3x^2) - (5x^2 - 3x + 2)$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $6y^2 - (-3 + y + 2y^2)$; б) $9 + (y^2 - 4) + 5y$;
в) $2y - (5 - 3y + 5y^2) + (4 - 5y^2)$;
г) $7 + (9y - 3y^2) + (5y^2 - 7y + 7) - 2y$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак перед скобкой изменился на противоположный:

а) $3x^2 - (5 - 4x)$;
б) $7x + (-4x + 3)$.

5. Три последних члена многочлена $13 - 2x^2 + x^3 - 4x^4$ заключите в скобки, перед которыми стоит знак: а) плюс; б) минус.

6*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = (5x - x^2) - (5x^2 - 2x + 4) + A.$$

С—9 Умножение многочлена на одночлен

Вариант I

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:

а) $3(a-2)$; б) $a(4+3a)$;
в) $0{,}2x(5x+3)$; г) $-0{,}5x(4{,}2x-7)$.

2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:

а) $3a(a^2+3a-2)$; б) $2a^2(3-2a+4a^2)$;
в) $0{,}4x(3-5x+10x^2)$; г) $-3x^2(0{,}3x-0{,}7)$;
д) $5x(2-3x)+3(5x^2-x)-7(x-1)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3x-6$; б) $4x^2-6x+12$;
в) $5x+4x^2$; г) $5x^3+15x^2-25x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

а) $3(5-2x)-x(-5+2x)$; б) $x(5x-1)+11(-5x+1)$.

5*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B=7x(x-3)-3(x-10)+A.$$

Вариант II

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:

а) $4(b-3)$; б) $b(3+2b)$;
в) $0{,}1y(5y+8)$; г) $-0{,}6y(1{,}5y-3)$.

2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:

а) $4b(b^2-2b+3)$; б) $3b^2(5+3b-2b^2)$;
в) $0{,}5y(6-4y+8y^2)$; г) $-4y^2(0{,}5y-0{,}3)$;
д) $4x(3-5x)+5(4x^2-2x)-2(x-2)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $4x-8$; б) $15x^2-10x+5$;
в) $3x+2x^2$; г) $3x^3+9x^2-12x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

а) $4(4-3x)-x(-4+3x)$; б) $x(6x-2)+12(-6x+2)$.

5*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B=6x(x-4)-5(x-5)+A.$$

Вариант III

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:

а) $5(4b - 1{,}2)$; б) $3b(4 + 5b)$;
в) $0{,}2y(4y + 9)$; г) $-8y^2(2{,}5y - 0{,}6)$.

2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:

а) $5a(2a^2 + 4a - 3)$; б) $4a^2(5 - 6a + 3a^2)$;
в) $0{,}8x(7 - 8x + 9x^2)$; г) $-1{,}5x(4x^2 - 6{,}4x + 7)$;
д) $6x(4 - 5x) + 3(10x^2 - 6x) - 6(x - 3)$;
е) $x - 2(x - 3(x + 4)) + 5$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $7x - 21$; б) $8x^2 - 12x + 24$;
в) $13x + 17x^2$; г) $6x^3 + 8x^2 - 10x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

а) $5(3 - 4x) - x(-3 + 4x)$; б) $x(7x - 3) + 13(-7x + 3)$.

5*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = 8x(3x - 1) - 10(x - 1) + A.$$

Вариант IV

1. Найдите произведение многочлена и одночлена:

а) $5(b - 7)$; б) $b(4 + 3b)$;
в) $0{,}1y(4y + 5)$; г) $-5y^2(0{,}7y - 0{,}8)$.

2. Преобразуйте произведение многочлена и одночлена в многочлен стандартного вида:

а) $3b(b^2 - 2b + 3)$; б) $4b^2(5 + 3b - 2b^2)$;
в) $1{,}5y(6 - 4y + 8y^2)$; г) $-0{,}8y(8y^2 + 2{,}5y - 3)$;
д) $7x(3 - 6x) + 3(14x^2 - 5x) - 6(x - 1)$;
е) $x + 2(x + 3(x - 4)) - 5$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $8x - 24$; б) $9x^2 - 18x + 36$;
в) $15x + 11x^2$; г) $5x^3 + 10x^2 - 15x$.

4. Преобразуйте выражение так, чтобы знак каждого слагаемого, заключённого во вторые скобки, изменился на противоположный:

а) $6(2 - 5x) - x(-2 + 5x)$; б) $x(8x - 4) + 14(-8x + 4)$.

5*. Подберите такой многочлен A, чтобы выражение B было равно нулевому многочлену, если

$$B = 9x(2x - 2) - 8(x - 2) + A.$$

С—10 Умножение многочленов

Вариант I

1. Выполните умножение:

а) $(3 + a)(2a + 1)$; б) $(5a + a^2)(3 - 2a)$;
в) $(3 - x)(2 - 4x)$; г) $(-x - 3)(2x - 4)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $8 - (2 + a)(3a + 4)$; б) $2a^3 + (a + a^2)(5 - 2a)$;
в) $(1 - x)(2 + 2x) + (2 - x)(1 - 2x)$;
г) $(x - 2)(x - 5) - (x - 3)(x - 4)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3x^2 - 6x$; б) $x(x - 3) - 8(x - 3)$.

4. Разложите на множители выражение:

а) $3(x - 4) + x^2 - 4x$; б) $2x - 8 - x(x - 4)$;
в) $x^3 + 5x^2 - 2x - 10$; г) $x^3 - 6x^2 - 2x + 12$.

5*. Представьте многочлен $x^2 + 3x - 4$ в виде произведения двучленов.

Вариант II

1. Выполните умножение:

а) $(2 + b)(3b + 2)$; б) $(5b - b^2)(2 + 3b)$;
в) $(2 - b)(3 - 5b)$; г) $(-3b - 4)(2b - 5)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $9 - (3 + a)(2a + 3)$; б) $4a^3 + (a - a^2)(3 + 4a)$;
в) $(1 - 2x)(2 + x) + (1 - x)(2 - 2x)$;
г) $(x - 3)(x - 4) - (x - 5)(x - 2)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $14x + 7x^2$; б) $x(x - 4) - 5(x - 4)$.

4. Разложите на множители выражение:

а) $2(x - 3) + x^2 - 3x$; б) $3x - 6 - x(x - 2)$;
в) $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$; г) $x^3 - 5x^2 - 3x + 15$.

5*. Представьте многочлен $x^2 - 3x + 2$ в виде произведения двучленов.

Вариант III

1. Выполните умножение:

а) $(3 + 4a)(2a + 6)$; б) $(3a + a^2)(4 - 5a)$;
в) $(7 - 4x)(8 - 3x)$; г) $(-3x - 4)(3x - 4)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $9a - (4 + a)(2a + 1)$; б) $3a^3 + (2a + 3a^2)(6 - a)$;

в) $(3 - x)(1 + 2x) + (1 - x)(3 - 2x)$;
г) $(x - 2)(2x - 6) - (x - 3)(2x - 4)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $5x^2 - 15x$; б) $x(x^2 - 2) - 4(x^2 - 2)$;
в) $4(x - 6) - 3x(-6 + x)$; г) $6(x - 6) + x(6 - x)$.

4. Разложите на множители выражение:
а) $4(x - 5) + 3x^2 - 15x$; б) $4x - 8 - x(x - 2)$;
в) $2x^3 + 6x^2 - 3x - 9$; г) $x^3 - 7x^2 - 3x + 21$.

5*. Представьте многочлен $x^2 - 4x + 3$ в виде произведения двучленов.

Вариант IV

1. Выполните умножение:
а) $(5 + 3b)(3b + 4)$; б) $(3b - b^2)(4 + 7b)$;
в) $(2 - 3b)(4 - 5b)$; г) $(-5b - 3)(5b - 3)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $16a - (5 + a)(2a + 6)$; б) $4a^3 + (a + 4a^2)(4 - a)$;
в) $(4 - x)(1 + 3x) + (2 - x)(1 - 5x)$;
г) $(x - 4)(2x - 10) - (2x - 6)(x - 5)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $18x + 9x^2$; б) $x(x - 4) - 5(x - 4)$;
в) $5(x - 5) - 2x(-5 + x)$; г) $5(x - 7) + x(7 - x)$.

4. Разложите на множители выражение:
а) $5(x - 4) + 2x^2 - 8x$; б) $5x - 10 - x(x - 2)$;
в) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 10$; г) $x^3 - 8x^2 - 3x + 24$.

5*. Представьте многочлен $x^2 + 4x - 5$ в виде произведения двучленов.

С—11 Числовое значение выражения

Вариант I

1. Вычислите значение выражения:
а) $5(3 - 2a) + 3(4a - 5)$ при $a = 3{,}5$;
б) $7{,}2(a + a^2) - 3{,}6(a + 2a^2)$ при $a = -0{,}1$;
в) $(3 - x) - (2 - 4x) + (4 - 3x)$ при $x = 0{,}1234$.

2. Найдите значение x, при котором числовое значение выражения

$$2x - (7x - 13)$$

равно 1.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(1 + x)(2 - x) + (2 + x)(3 + x)$$

при $x = \frac{5}{6}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 2)(2x - 3) - (3x + 2)(2x + 3) + 26x + 1$$

не зависит от значений x.

Вариант II

1. Вычислите значение выражения:

а) $4(5 - 3a) + 5(3a - 4)$ при $a = 2,5$;

б) $6,4(a + a^2) - 3,2(a + 2a^2)$ при $a = -0,1$;

в) $(4 - 2x) - (3 - 5x) + (4 - 3x)$ при $x = 0,2345$.

2. Найдите значение x, при котором числовое значение выражения

$$3x - (8x - 11)$$

равно 1.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(1 - x)(2 + x) + (3 + x)(4 + x)$$

при $x = \frac{5}{6}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 1)(4x - 3) - (3x + 1)(4x + 3) + 26x + 2$$

не зависит от значений x.

Вариант III

1. Вычислите значение выражения:

а) $7(8 - 2a) + 4(3a - 14)$ при $a = 4,5$;

б) $7,5(a + a^2) - 2,5(a + 3a^2)$ при $a = -0,12$;

в) $(7 - 5x) - (6,4 - 9x) + (4,4 - 4x)$ при $x = 0,3456$.

2. Найдите значение x, при котором числовое значение выражения

$$5 + 2x - 3(x - 13)$$

равно 50.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(2 - x)(3 + x) + (4 - x)(5 - x)$$

при $x = \frac{3}{20}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(4x - 1)(5x - 2) - (4x + 1)(5x + 2) + 26x + 3$$

не зависит от значений x.

Вариант IV

1. Вычислите значение выражения:

а) $8(5 - 3a) + 2(11a - 20)$ при $a = 5,5$;

б) $5,6(a + a^2) - 2,8(a + 2a^2)$ при $a = -0,11$;

в) $(6 - 7x) - (8,2 - 9x) + (7,2 - 2x)$ при $x = 0,4567$.

2. Найдите значение x, при котором числовое значение выражения

$$7 + 3x - 4(x - 12)$$

равно 60.

3. Найдите числовое значение выражения

$$(3 - x)(2 + x) + (5 - x)(6 - x)$$

при $x = \frac{3}{20}$.

4*. Докажите, что значение выражения

$$(3x - 2)(5x - 1) - (3x + 2)(5x + 1) + 26x + 4$$

не зависит от значений x.

С—12 Формулы сокращённого умножения

Вариант I

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(a + b)^2$; б) $(a + b)(a - b)$; в) $(x - y)^3$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a - 4)^2$; б) $(a + 7)(a - 7)$;
в) $(x + 3)^3$; г) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2 + 4x + 4$; б) $x^2 - 10x + 25$;
в) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; г) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

4*. Запишите многочлен

$$x^2 + 4x - 5$$

в виде произведения двучленов.

Вариант II

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(a - b)^2$; б) $(a - b)(a + b)$; в) $(x + y)^3$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a + 5)^2$; б) $(a + 6)(a - 6)$;
в) $(x - 2)^3$; г) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2 - 2x + 1$; б) $x^2 + 6x + 9$;
в) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; г) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$.

4*. Запишите многочлен

$$x^2 + 6x - 7$$

в виде произведения двучленов.

Вариант III

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(x + y)^2$; б) $(x + y)(x - y)$; в) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a - 6)^2$; б) $(a + 4)(a - 4)$;
в) $(2x + 5)^3$; г) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2 - 8x + 16$; б) $49x^2 + 14x + 1$;
в) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$;
г) $x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}12x - 0{,}008$.

4*. Запишите многочлен
$$x^2 - 4x - 5$$
в виде произведения двучленов.

Вариант IV

1. Применяя формулу сокращённого умножения, запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:
а) $(x - y)^2$; б) $(x - y)(x + y)$; в) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

2. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(a + 4)^2$; б) $(a + 5)(a - 5)$;
в) $(2x - 3)^3$; г) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

3. Запишите выражение в виде квадрата или куба двучлена:
а) $x^2 + 18x + 81$; б) $100x^2 - 20x + 1$;
в) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$;
г) $x^3 - 0{,}9x^2 + 0{,}27x - 0{,}027$.

4*. Запишите многочлен
$$x^2 - 6x - 7$$
в виде произведения двучленов.

С—13 Разложение многочленов на множители

Вариант I

1. Разложите на множители многочлен:
а) $b^3 - 2b^2 + b$; б) $ab^3 + 2a^2b^2 + a^3b$;
в) $3a + 3b - ax - bx$; г) $5a - b + 5a^2 - ab$;
д) $7a - 7b + 2b^2 - 2ab$; е) $b^4 - b^2 + 4b + 4$.

2. Разложите на множители многочлен:
а) $x^2 - 4 - 3ax + 6a$; б) $x^3 + 27$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 5x^2 + 4$ на возможно большее число множителей.

Вариант II

1. Разложите на множители многочлен:
   а) $a^3 + 2a^2 + a$; б) $a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$;
   в) $5a + 5b - ay - by$; г) $a - 5b + a^2 - 5ab$;
   д) $8a - 8b - 3b^2 + 3ab$; е) $a^4 - a^2 + 6a + 6$.
2. Разложите на множители многочлен:
   а) $x^2 - 9 - 2ax - 6a$; б) $x^3 - 8$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 10x^2 + 9$ на возможно большее число множителей.

Вариант III

1. Разложите на множители многочлен:
   а) $b^4 - 2b^3 + b^2$; б) $a^2b^3 + 2a^3b^2 + a^4b$;
   в) $9a + 9b - ax^2 - bx^2$; г) $3a + b - 3a^3 + ab$;
   д) $5a - 5b + b^2 - ab$; е) $b^2 + 8b + 16 - c^2$.
2. Разложите на множители многочлен:
   а) $x^2 - 9 - 3ax + 9a$; б) $x^2 + 5x + 4$; в) $x^8 + 64$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 17x^2 + 16$ на возможно большее число множителей.

Вариант IV

1. Разложите на множители многочлен:
   а) $a^4 + 2a^3 + a^2$; б) $a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4$;
   в) $4a + 4b - ay^2 - by^2$; г) $a - 2b - a^3 - 2ab$;
   д) $6a - 6b - 5b^2 + 5ab$; е) $a^2 + 6a + 9 - b^2$.
2. Разложите на множители многочлен:
   а) $x^2 - 16 - ax + 4a$; б) $x^2 + 6x + 5$; в) $x^4 + 64$.

3*. Разложите многочлен $x^4 - 26x^2 + 25$ на возможно большее число множителей.

С—14 Алгебраические дроби

Вариант I

1. Сократите дробь:
   а) $\dfrac{3x^2}{15x^3}$; б) $\dfrac{2x-12}{x-6}$; в) $\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2}$.
2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:
   а) $\dfrac{3x+2}{x-1}$; б) $-\dfrac{6x-1}{x+1}$.
3. Приведите дроби к общему знаменателю:
   а) $\dfrac{x}{x-5}$ и $\dfrac{3}{5-x}$; б) $\dfrac{x}{(x-4)^2}$ и $\dfrac{7}{x^2-16}$; в) $\dfrac{5}{x+1}$ и $\dfrac{7}{x-2}$.

4. Запишите многочлен $2x+3$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) 5; в) $x-1$.

5*. Сократите дробь $\frac{x^3-8}{3x^2+6x+12}$.

Вариант II

1. Сократите дробь:

а) $\frac{4x^3}{12x^2}$; б) $\frac{2x+6}{3x+9}$; в) $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{2x-3}{x+5}$; б) $-\frac{3x+1}{x-2}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{4}{x-6}$ и $\frac{x}{6-x}$; б) $\frac{x}{(x+5)^2}$ и $\frac{5}{x^2-25}$; в) $\frac{x}{x-3}$ и $\frac{2}{x+2}$.

4. Запишите многочлен $3x-2$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) 4; в) $x+1$.

5*. Сократите дробь $\frac{2x^2-4x+8}{x^3+8}$.

Вариант III

1. Сократите дробь:

а) $\frac{14x^3}{49x^2}$; б) $\frac{2x-8}{3x-12}$; в) $\frac{x^2+12x+36}{x^2-36}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{x^2-3x+5}{x-8}$; б) $-\frac{5x-12}{x+13}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x-8}$ и $\frac{4x}{24-3x}$; б) $\frac{x}{(6-x)^2}$ и $\frac{5}{x^2-36}$; в) $\frac{11}{3x+4}$ и $\frac{12}{2x-3}$.

4. Запишите многочлен $4x+5$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) $x+1$; в) x^2-3.

5*. Сократите дробь $\frac{x^3-27}{4x^2+12x+36}$.

Вариант IV

1. Сократите дробь:

а) $\frac{17x^2}{51x^3}$; б) $\frac{3x+15}{4x+20}$; в) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$.

2. Преобразуйте дробь так, чтобы знак перед дробью изменился на противоположный:

а) $\frac{x^2+6x-7}{x-9}$; б) $-\frac{7x-13}{x-12}$.

3. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x}{x-7}$ и $\frac{11}{21-3x}$; б) $\frac{x}{(7-x)^2}$ и $\frac{4}{x^2-49}$; в) $\frac{13}{3x-4}$ и $\frac{11}{2x+6}$.

4. Запишите многочлен $5x+4$ в виде дроби со знаменателем:

а) 1; б) $x-1$; в) x^2+3.

5*. Сократите дробь $\frac{2x^2-6x+18}{x^3+27}$.

С—15 Сложение и вычитание алгебраических дробей

Вариант I

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{1}{x-2}+\frac{x}{-x+2}$; б) $\frac{3x}{4x-7}-\frac{1}{7-4x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{3x+1}{x+1}+\frac{3+x}{x+1}$; б) $\frac{3x}{x-4}+\frac{x+8}{4-x}$;

в) $\frac{5x+1}{x-1}-\frac{6}{x-1}$; г) $\frac{5x-3}{x-3y}-\frac{1-5y}{3y-x}$.

3*. Найдите многочлен A, для которого верно равенство

$$\frac{2x-1}{x-5}-\frac{x+2}{5-x}=\frac{A}{x-5}.$$

Вариант II

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{5x}{x-4}+\frac{13+x}{4-x}$; б) $\frac{12x}{5x-3}-\frac{3}{3-5x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{2+3x}{x+1}$; б) $\frac{3x}{x-2}+\frac{2x+2}{2-x}$;

в) $\frac{7x-2}{x-1}-\frac{5}{x-1}$; г) $\frac{3x-5}{x-4y}-\frac{1-3y}{4y-x}$.

3*. Найдите многочлен A, для которого верно равенство

$$\frac{3x-1}{x-4}-\frac{x-3}{4-x}=\frac{A}{x-4}.$$

Вариант III

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{4x+2}{2x-3}+\frac{x-17}{3-2x}$; б) $\frac{1-2x}{4x-3}-\frac{3+x}{3-4x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{2x+13}{x+5}+\frac{2+x}{x+5}$; б) $\frac{4x-1}{3x-7}+\frac{13-2x}{7-3x}$;

в) $\frac{7x-11}{x-4}-\frac{13+x}{x-4}$; г) $\frac{5x-6}{x^2-3xy}-\frac{5y-2}{xy-3y^2}$.

3*. Найдите многочлен A, для которого верно равенство

$$\frac{4x+5}{2x-7}+\frac{3x-1}{7-2x}=\frac{A}{2x-7}.$$

Вариант IV

1. Преобразуйте выражение, приведя дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{x+12}{8x-7}+\frac{2x-7}{7-8x}$; б) $\frac{11-x}{5x-9}-\frac{5+4x}{9-5x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{3x+11}{x+4}+\frac{9+2x}{x+4}$; б) $\frac{7x-11}{2x-5}+\frac{x+4}{5-2x}$;

в) $\frac{5x-11}{x-6}-\frac{7+2x}{x-6}$; г) $\frac{4x-10}{x^2-5xy}-\frac{4y-2}{xy-5y^2}$.

3*. Найдите многочлен A, для которого верно равенство

$$\frac{5x+4}{7x-2}+\frac{x-3}{2-7x}=\frac{A}{7x-2}.$$

С—16 Умножение и деление алгебраических дробей

Вариант I

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{5x}{2}\cdot\frac{6}{x^2}$; б) $(x-1)\cdot\frac{2x+1}{3x-3}$;

в) $\frac{3x+6}{x-3}\cdot\frac{4x-12}{x^2-4}$.

2. Вычислите частное:

а) $3x : \frac{2x^2}{x-7}$; б) $\frac{5x+10}{x-5} : \frac{3x+6}{x^2-25}$; в) $\frac{4x-8}{x^2-9} : \frac{5x-10}{(x+3)^2}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{2x-4}{x+1} \cdot \frac{4x-12}{3x-6} : \frac{2x-6}{3x+3}.$$

Вариант II

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{3x^2}{10} \cdot \frac{5}{x}$; б) $(x+1) \cdot \frac{5x-3}{4x+4}$; в) $\frac{3x+9}{x-4} \cdot \frac{4x-16}{x^2-9}$.

2. Вычислите частное:

а) $2x : \frac{3x^3}{x-4}$; б) $\frac{5x+15}{3x-15} : \frac{3x+9}{x^2-25}$; в) $\frac{7x-14}{(x-3)^2} : \frac{2x-4}{x^2-9}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{3x-6}{x+1} \cdot \frac{2x-10}{4x-8} : \frac{x-5}{4x+4}.$$

Вариант III

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{4x}{9} \cdot \frac{12}{x^2}$; б) $(x+1) \cdot \frac{2x+5}{3x^2-3}$; в) $\frac{x^2-4}{2x-6} \cdot \frac{5x-15}{2x+4}$.

2. Вычислите частное:

а) $(2x-6) : \frac{3x-9}{5x^2}$; б) $\frac{4x+12}{3x-12} : \frac{x^2+6x+9}{8-2x}$; в) $\frac{2x+12}{(3-x)^2} : \frac{x^2+6x}{x-3}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{5x-10}{x+5} : \frac{2x-4}{3x+3} \cdot \frac{2x+10}{5x+5}.$$

Вариант IV

1. Вычислите произведение:

а) $\frac{12x^2}{35} \cdot \frac{5}{2x}$; б) $(x-1) \cdot \frac{3x-7}{4x^2-4}$; в) $\frac{x^2-9}{3x-6} \cdot \frac{5x-10}{3x+9}$.

2. Вычислите частное:

а) $(2x+4) : \frac{3x+6}{7x^3}$; б) $\frac{5x-15}{3x-18} : \frac{x^2-6x+9}{12-2x}$; в) $\frac{3x+12}{(7-x)^2} : \frac{x^2+4x}{x-7}$.

3*. Вычислите:

$$\frac{3x-9}{x+2} : \frac{2x-6}{7x-14} \cdot \frac{2x+4}{3x-6}.$$

С—17 Рациональные выражения

Вариант I

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x+3+\dfrac{9}{x-3}\right)\cdot\dfrac{5x-15}{x^2}$;

б) $(x^2-4)\cdot\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{2x-y}{2x+y}-\dfrac{2x+y}{2x-y}\right):\dfrac{4xy}{y^2-4x^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}{1-x+y}:\dfrac{x}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+1}{x^2-6x+9}-\frac{x-1}{x^2-9}\right):\left(\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{x-1}{x^2+6x+9}\right).$$

Вариант II

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x-2+\dfrac{4}{x+2}\right)\cdot\dfrac{6x+12}{x^2}$;

б) $(x^2-9)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{x+2y}{x-2y}\right):\dfrac{4xy}{x^2-4y^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{1+x-y}:\dfrac{x}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+2}{x^2-2x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right):\left(\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2+2x+1}\right).$$

Вариант III

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x-4+\dfrac{16}{x+4}\right)\cdot\dfrac{5x+20}{x^2}$;

б) $(x^2-25)\cdot\left(\dfrac{2x}{25-x^2}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x+5}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{4x-3y}{4x+3y}-\dfrac{4x+3y}{4x-3y}\right):\dfrac{12xy}{9y^2-16x^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}}{1+2x-3y}:\dfrac{x^2}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-8x+16}-\frac{x-3}{x^2-16}\right):\left(\frac{x+3}{x^2-16}-\frac{x-3}{x^2+8x+16}\right).$$

Вариант IV

1. Упростите выражение:

   а) $\left(x-5+\dfrac{25}{x+5}\right)\cdot\dfrac{7x+35}{x^2}$;

   б) $(x^2-16)\cdot\left(\dfrac{2x}{16-x^2}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+4}\right)$.

2. Выполните действия:

   а) $\left(\dfrac{3x-4y}{3x+4y}-\dfrac{3x+4y}{3x-4y}\right):\dfrac{12xy}{16y^2-9x^2}$; б) $\dfrac{\frac{3}{xy}-\frac{2}{y}+\frac{1}{x}}{3-2x-y}:\dfrac{x^2}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+4}{x^2-10x+25}-\frac{x-4}{x^2-25}\right):\left(\frac{x+4}{x^2-25}-\frac{x-4}{x^2+10x+25}\right).$$

С—18 Числовое значение рационального выражения

Вариант I

1. Найдите значение рационального выражения:

   а) $\dfrac{12}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}$ при $x=2002$;

   б) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{x-1}{x+1}$ при $x=19$;

   в) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ при $a=0{,}05$, $b=13\frac{14}{15}$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x-2}-\frac{12x}{x^3-8}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}$$

   и найдите значение полученной дроби при: а) $x=0$; б) $x=2$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}+\frac{2x^2-10x-18}{x^2-9}$$

   одно и то же при каждом значении x, кроме $x=3$ и $x=-3$.

Вариант II

1. Найдите значение рационального выражения:

   а) $\dfrac{-6}{x^2-1}+\dfrac{3}{x-1}$ при $x=1999$;

   б) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$ при $x=21$;

   в) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ при $a=14\frac{15}{16}$, $b=0{,}05$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x-3}-\frac{18x}{x^3-27}-\frac{x-3}{x^2+3x+9}$$

и найдите значение полученной дроби при: а) $x=0$; б) $x=3$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+3}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x^2-10x-8}{x^2-4}$$

одно и то же при каждом значении x, кроме $x=2$ и $x=-2$.

Вариант III

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{2x+24}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}$ при $x=1997$;

б) $\frac{x^2}{x^2+2x+1}-\frac{3x-4}{3x+3}$ при $x=19$;

в) $\frac{8a^3-b^3}{4a^2+2ab+b^2}+\frac{8a^3+b^3}{4a^2-2ab+b^2}$ при $a=0{,}05$, $b=-13\frac{14}{15}$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x+3}+\frac{18x}{x^3+27}-\frac{x+3}{x^2-3x+9}$$

и найдите значение полученной дроби при $x=-3$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+3}{x-5}-\frac{x-3}{x+5}+\frac{3x^2-16x-75}{x^2-25}$$

одно и то же при каждом значении x, кроме $x=5$ и $x=-5$.

Вариант IV

1. Найдите значение рационального выражения:

а) $\frac{3x-28}{x^2-16}+\frac{2}{x-4}$ при $x=1996$;

б) $\frac{x^2}{x^2+4x+4}-\frac{2x-5}{2x+4}$ при $x=18$;

в) $\frac{a^3+8b^3}{a^2-2ab+4b^2}-\frac{a^3-8b^3}{a^2+2ab+4b^2}$ при $a=-14\frac{15}{16}$, $b=0{,}05$.

2. Преобразуйте в алгебраическую дробь рациональное выражение

$$\frac{2}{x+2}+\frac{12x}{x^3+8}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}$$

и найдите значение полученной дроби при $x=-2$.

3*. Докажите, что значение рационального выражения

$$\frac{x+5}{x-4}-\frac{x-5}{x+4}+\frac{3x^2-18x-48}{x^2-16}$$

одно и то же при каждом значении x, кроме $x=4$ и $x=-4$.

С—19 Тождества

Вариант I

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{8x}{x^2-4}$;

б) $\frac{10}{x^2+2x+1}:\frac{x}{x+1}=\frac{10}{x^2+x}$;

в) $\left(x+5+\frac{25}{x-5}\right)\cdot\frac{x-5}{x^2}=1$;

г) $\left(\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}\right):\frac{x^2+9}{x^2-9}=2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}+\frac{x^3+1}{x^2+2x+1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{x^3+2x}=2.$$

Вариант II

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{12x}{x^2-9}$;

б) $\frac{11}{x^2+4x+4}:\frac{x}{x+2}=\frac{11}{x^2+2x}$;

в) $\left(x-6+\frac{36}{x+6}\right)\cdot\frac{x+6}{x^2}=1$;

г) $\left(\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-4}=2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}+\frac{x^3+8}{x^2+4x+4}\right)\cdot\frac{x^2-4}{x^3+8x}=2.$$

Вариант III

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{20x}{x^2-25}$;

б) $\frac{12}{x^2-2x+1}:\frac{x}{x-1}=\frac{12}{x^2-x}$;

в) $\left(x+7+\frac{49}{x-7}\right)\cdot\frac{7-x}{x^2}=-1$;

г) $\left(\frac{x-6}{x+6}+\frac{x+6}{x-6}\right):\frac{x^2+36}{x^2-36}=2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}+\frac{x^3+27}{x^2+6x+9}\right)\cdot\frac{x^2-9}{x^3+18x}=2.$$

Вариант IV

1. Докажите тождество:

а) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{16x}{x^2-16}$; б) $\frac{13}{x^2-4x+4}:\frac{x}{x-2}=\frac{13}{x^2-2x}$;

в) $\left(x-8+\frac{64}{x+8}\right)\cdot\frac{-x-8}{x^2}=-1$; г) $\left(\frac{x-4}{x+4}+\frac{x+4}{x-4}\right):\frac{x^2+16}{x^2-16}=2$.

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

2*. Докажите тождество

$$\left(\frac{x^3-64}{x^2-8x+16}+\frac{x^3+64}{x^2+8x+16}\right)\cdot\frac{x^2-16}{x^3+32x}=2.$$

С—20 Степень с целым показателем

Вариант I

1. Вычислите:

а) 2^{-3}; б) 3^{-4}; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; г) $(-10)^{-2}$; д) $(-0{,}5)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-3}\cdot x$; б) $x^3:x^{-2}$; в) $\frac{x^3\cdot x^{-4}}{x^{-3}}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2}\cdot(x^{-2}+2x^{-1}+1)$.

4*. Вычислите: $\frac{10^{n+1}\cdot 3^n}{15^n\cdot 2^n}$, где n — любое целое число.

Вариант II

1. Вычислите:

а) 3^{-4}; б) 4^{-2}; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $(-10)^{-3}$; д) $(-0{,}6)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-4}\cdot x$; б) $x^2:x^{-1}$; в) $\frac{x^4\cdot x^{-3}}{x^{-2}}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2}\cdot(x^{-2}-2x^{-1}+1)$.

4*. Вычислите: $\frac{15^{n+1}\cdot 2^n}{6^n\cdot 5^n}$, где n — любое целое число.

Вариант III

1. Вычислите:

а) 4^{-1}; б) $(0{,}1)^{-2}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) -10^{-3}; д) $(-0{,}7)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-6} \cdot x^4$; б) $x^4 : x^{-5}$; в) $\dfrac{x^5 \cdot x^{-7}}{x^{-4}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{-3} \cdot (x^{-2}+4x^{-1}+4)$; б) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2b}\right) \cdot \left(\dfrac{a-2b}{a^2b^2}\right)^{-1}$.

4*. Вычислите: $\dfrac{12^{n+1} \cdot 5^n}{6^n \cdot 10^n}$, где n — любое целое число.

Вариант IV

1. Вычислите:

а) 5^{-2}; б) $(0,1)^{-1}$; в) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$; г) -10^{-4}; д) $(-0,8)^0$.

2. Упростите:

а) $x^{-7} \cdot x^5$; б) $x^5 : x^{-4}$; в) $\dfrac{x^6 \cdot x^{-8}}{x^{-3}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{3x-1}{x}\right)^{-3} \cdot (x^{-2}-6x^{-1}+9)$; б) $\left(\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{2a-b}{a^2b^2}\right)^{-1}$.

4*. Вычислите: $\dfrac{20^{n+1} \cdot 3^n}{12^n \cdot 5^n}$, где n — любое целое число.

С—21* Делимость многочленов

Вариант I

1. Разделите многочлен A на многочлен B, если:
а) $A = x^3 - x^2 - 11x + 3$, $B = x + 3$;
б) $A = x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x - 2$, $B = x - 2$;
в) $A = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$, $B = x^2 + x + 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A, B), если

$$A = x^3 - 6x^2 + 11x - 12,\ B = x^2 - 2x + 3.$$

3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - 2x^2 - x + a$, $B = x^2 - x - 2$?

Вариант II

1. Разделите многочлен A на многочлен B, если:
а) $A = x^3 + x^2 + 11x + 3$, $B = x - 3$;
б) $A = x^4 - x^3 - 7x^2 - 3x - 2$, $B = x + 2$;
в) $A = x^3 + 4x^2 - 4x + 5$, $B = x^2 - x + 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A, B), если

$$A = x^3 + 6x^2 + 5x - 12,\ B = x^2 + 2x - 3.$$

3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 + 2x^2 - x + a$, $B = x^2 + x - 2$?

Вариант III

1. Разделите многочлен A на многочлен B, если:
а) $A = x^3 - 15x + 4$, $B = x + 4$;
б) $A = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 13x + 12$, $B = x - 3$;
в) $A = x^3 - 4x^2 - 6x + 5$, $B = x^2 + x - 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A, B), если

$$A = x^3 - 2x^2 - 29x + 30,\ B = x^2 + 4x - 5.$$

3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 - 3x^2 - 4x + a$, $B = x^2 - x - 6$?

Вариант IV

1. Разделите многочлен A на многочлен B, если:
а) $A = x^3 - 15x - 4$, $B = x - 4$;
б) $A = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x + 12$, $B = x + 3$;
в) $A = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$, $B = x^2 - x - 1$.

2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД (A, B), если

$$A = x^3 + 2x^2 - 19x + 30,\ B = x^2 - 4x + 5.$$

3*. При каком значении a многочлен A делится на многочлен B с остатком 0, если $A = x^3 + 3x^2 - 4x + a$, $B = x^2 + x - 6$?

С—22 Линейные уравнения

Вариант I

Решите уравнение (1—4).

1. а) $2x = 7$; б) $2x = 0$; в) $0 \cdot x = 2$.

2. а) $7x - 3 = 2x + 1$; б) $2x + 3 = 5x - 1$;
в) $3(x - 2) = 5x + 3$; г) $5x - 7(x - 3) = 4x + 5$.

3. а) $3(2x - 0{,}8) = 2(3x - 1{,}2)$;
б) $5(2x - 0{,}4) - 3x = 7x - 2$.

4*. $x + (2x - (3x + 4)) = 4x - (3x + (2x - 1))$.

Вариант II

Решите уравнение (1—4).

1. а) $5x = 3$; б) $3x = 0$; в) $0 \cdot x = 3$.

2. а) $6x - 2 = x + 3$; б) $3x + 2 = 6x - 4$;
в) $2(x - 3) = 4x + 1$; г) $2x - 5(x - 4) = 3x + 4$.

3. а) $4(5x+1)=5(4x+0{,}8)$;
б) $3(2x-0{,}5)-4x=2x-1{,}5$.

4*. $x-(2x+(3x-4))=-4x+(3x-(2x+1))$.

Вариант III

Решите уравнение (1—4).

1. а) $-7x=5$; б) $4x=0$; в) $0\cdot x=4$.

2. а) $5x-12=2x+11$; б) $5x+7=2x-3$;
в) $5(2x-3)=3x+3$; г) $x-3(5x-4)=-10x+1$.

3. а) $5(0{,}4x-0{,}8)=4(0{,}5x+1)$;
б) $6(0{,}4x-0{,}5)-1{,}3x=1{,}1x-3$.

4*. $x+2(x-3(x+4))=4x-3(x+2(x-1))$.

Вариант IV

Решите уравнение (1—4).

1. а) $-3x=-2$; б) $5x=0$; в) $0\cdot x=5$.

2. а) $6x-13=3x+10$; б) $7x+5=4x-5$;
в) $4(3x-2)=5x+9$; г) $x-5(3x-5)=-10x+2$.

3. а) $6(0{,}3x+0{,}4)=3(0{,}6x-0{,}8)$;
б) $5(0{,}4x-0{,}6)-0{,}3x=1{,}7x-3$.

4*. $x-2(x+3(x-4))=-5x+4(x-3(x+2))$.

С – 23* Линейные уравнения с параметром

Вариант I

1. Решите уравнение $4x-7a=11$ для каждого значения a.
2. При каком значении a уравнение $12x-5a=-1$ имеет корень $x=2$?
3. При каком значении a уравнения $3x-5a=-7$ и $4x+7a=18$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $4(x+6)-ax=3$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$2(x-1)-ax=7.$$

Вариант II

1. Решите уравнение $7x-4a=13$ для каждого значения a.
2. При каком значении a уравнение $9x-5a=2$ имеет корень $x=3$?
3. При каком значении a уравнения $5x-3a=7$ и $4x+7a=15$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $3(x+7)-ax=6$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$5(x-4)-ax=6.$$

Вариант III

1. Решите уравнение $5x - 8a = 13$ для каждого значения a.
2. При каком значении a уравнение $7x + 4a = 2$ имеет корень $x = -2$?
3. При каком значении a уравнения $5x - 3a = 9$ и $6x + 5a = 28$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $5(x + 1) - ax = 2$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$3(x - 2) - ax = 1.$$

Вариант IV

1. Решите уравнение $8x - 5a = 17$ для каждого значения a.
2. При каком значении a уравнение $5x + 6a = 3$ имеет корень $x = -3$?
3. При каком значении a уравнения $6x + 7a = 33$ и $5x - 4a = -2$ имеют общий корень? Найдите этот корень.
4. При каком значении a уравнение $7(x + 2) - ax = 1$ не имеет корней?
5. Для каждого значения a решите уравнение
$$4(x - 3) - ax = 2.$$

С—24 Решение задач с помощью линейных уравнений

Вариант I

1. Одно число в 3 раза больше другого, а их сумма равна 144. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 120, а разность равна 12. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 102. Найдите эти числа.

4*. У Алёши, Бори и Вани есть по некоторой сумме денег. У Алёши — 100 р., у Бори — в 2 раза меньше, чем у остальных мальчиков вместе, а у Вани — в 3 раза меньше, чем у остальных мальчиков вместе. Сколько денег у трёх мальчиков вместе?

Вариант II

1. Одно число в 2 раза больше другого, а их сумма равна 441. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 140, а разность равна 14. Найдите эти числа.

3. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 201. Найдите эти числа.
4*. У Поли, Раи и Светы есть по некоторой сумме денег. У Поли — 150 р., у Раи — в 3 раза меньше, чем у остальных девочек вместе, а у Светы — в 2 раза меньше, чем у остальных девочек вместе. Сколько денег у трёх девочек вместе?

Вариант III

1. Отношение двух чисел равно 3 : 5, а их сумма равна 440. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 679, а разность равна 123. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных чётных натуральных чисел равна 372. Найдите эти числа.
4*. У Алёши, Бори и Вани есть по некоторой сумме денег. У Алёши — 200 р., у Бори — половина того, что у остальных мальчиков вместе, а у Вани — треть того, что у остальных мальчиков вместе. Сколько денег у трёх мальчиков вместе?

Вариант IV

1. Отношение двух чисел равно 4 : 5, а их сумма равна 441. Найдите эти числа.
2. Сумма двух чисел равна 967, а разность равна 321. Найдите эти числа.
3. Сумма трёх последовательных нечётных натуральных чисел равна 669. Найдите эти числа.
4*. У Поли, Раи и Светы есть по некоторой сумме денег. У Поли — 250 р., у Раи — треть того, что у остальных девочек вместе, а у Светы — половина того, что у остальных девочек вместе. Сколько денег у трёх девочек вместе?

С—25 Системы двух линейных уравнений

Вариант I

1. Является ли пара чисел (2; −1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ x - 3y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + y = 6? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x = 9, \\ 4x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x + 7y = 20. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 3a = 0, \\ x + 5y - 15 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант II

1. Является ли пара чисел (−2; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + y = 9, \\ -x - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = -5, \\ 3x + 7y = 1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x = 7, \\ 6x - y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 6, \\ x + 4y = 15. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x - ay + 5a = 0, \\ x + 3y - 15 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант III

1. Является ли пара чисел (3; −2) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} -x + 2y = -1, \\ x - 3y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y = 17, \\ 3x + 2y = 6? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x = 2, \\ 9x - y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 11, \\ 2x + 5y = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 6y = -4, \\ 3x - 6y = 12. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - ay + a = 0, \\ x + y - 1 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

Вариант IV

1. Является ли пара чисел (−2; 3) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 2x - y = -7? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x = 4, \\ 6x - y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y = 2, \\ 4x + 2y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 7y = -2, \\ 2x - 7y = 23. \end{cases}$

3*. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x - ay + 2a = 0, \\ x + y - 2 = 0: \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений;
б) имеет единственное решение?

В каждом случае запишите решения системы в виде пар чисел.

С—26 Решение задач с помощью систем уравнений

Вариант I

1. Три пирожка и две булки стоят 40 р., а два пирожка и три булки стоят 45 р. Сколько стоит пирожок, сколько стоит булка?
2. В классе 24 человека. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется 59 тетрадей. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

3*. На трёх банковских картах имелось 9000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — восьмая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант II

1. Три ватрушки и пять плюшек стоят 45 р., а пять ватрушек и три плюшки стоят 43 р. Сколько стоит ватрушка, сколько стоит плюшка?
2. В классе 25 человек. Чтобы выдать девочкам по три тетради, а мальчикам по две тетради, потребуется

62 тетради. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

3*. На трёх банковских картах имелось 12 000 р. На третьей карте было в 2 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — одиннадцатая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант III

1. Три марки и пять конвертов стоят 39 р., а четыре марки и два конверта стоят 24 р. Сколько стоит марка, сколько стоит конверт?

2. Токарь и его ученик за 3 ч обтачивают 75 деталей. Если токарь будет работать 2 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 70 деталей. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?

3*. На трёх банковских картах имелось 10 000 р. На третьей карте было в 1,5 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — девятая часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

Вариант IV

1. Пять открыток и четыре конверта стоят 44 р., а две открытки и три конверта стоят 26 р. Сколько стоит открытка, сколько стоит конверт?

2. Токарь и его ученик за 2 ч обтачивают 54 детали. Если токарь будет работать 3 ч, а его ученик — 4 ч, то вместе они обточат 92 детали. Сколько деталей обтачивает каждый из них за 1 ч?

3*. На трёх банковских картах имелось 8000 р. На третьей карте было в 1,5 раза больше, чем на остальных картах вместе, а на первой карте — третья часть той суммы, что была на остальных картах вместе. Какая сумма была на каждой банковской карте?

С—27* Системы трёх линейных уравнений

Вариант I

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-3y+2z=1, \\ x+y+z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3y-z=2, \\ x+z=1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4, \\ y + 5z = 7, \\ -z = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 5, \\ x - y + z = 5, \\ x - y - z = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 3y - z = 2, \\ -2x + 4y + 2z = 4, \\ 3x + y - 5z = -6. \end{cases}$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y - 3z = 6, \\ ax + 3y + z = 2: \end{cases}$$

а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

Вариант II

1. Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4, \\ 3x - 2y + 2z = 3, \\ x + y - z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3y + z = 4, \\ x - z = 1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ y + 2z = 8, \\ -z = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - y - z = 2, \\ x + y - z = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 3y + z = 6, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -x + 4y + 5z = 5. \end{cases}$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 3y + 2z = -3, \\ ax - 2y + z = 3: \end{cases}$$

а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

Вариант III

1. Является ли тройка чисел (1; 2; −1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ 2x - 2y + z = -3, \\ x + y - z = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3y + z = 5, \\ x - y = 1? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ y+2z=7, \\ -2z=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x-y+z=6, \\ x+y-z=-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ 3x-y+2z=7, \\ -x+5y-4z=-3. \end{cases}$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x-3y-2z=7, \\ ax+2y+3z=-1: \end{cases}$$

а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

Вариант IV

1. Является ли тройка чисел (1; −1; 2) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+3y-z=-4, \\ 3x-2y+z=7, \\ x+y-z=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 3y+2z=1, \\ x+z=2? \end{cases}$

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ y+3z=9, \\ -2z=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x-y+z=6, \\ x-y-z=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-3y-2z=-2, \\ -x+y+5z=13, \\ 3x+y-4z=-10. \end{cases}$

3*. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+3y+2z=7, \\ ax+y-3z=1: \end{cases}$$

а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение?

РАЗДЕЛ III

Контрольные работы

К—1 *Вариант I*

1. Разложите на простые множители число:
а) 388; б) 2520.

2. Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $3\frac{2}{5}$; б) $\frac{43}{30}$.

3. Сравните числа: 0,3; $\frac{1}{3}$; 0,(32); 0,(322). Выбрав единичный отрезок, укажите расположение данных чисел на координатной оси.

4. Вычислите:
а) $(1{,}075 - 0{,}05) : 0{,}25$; б) $\frac{3}{5} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 : 1\frac{1}{9}$;
в) $(-2)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^4$.

К—1 *Вариант II*

1. Разложите на простые множители число:
а) 376; б) 2640.

2. Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $3\frac{1}{4}$; б) $\frac{41}{30}$.

3. Сравните числа: 0,6; $\frac{2}{3}$; 0,(67); 0,(677). Выбрав единичный отрезок, укажите расположение данных чисел на координатной оси.

4. Вычислите:
а) $(1{,}225 + 0{,}05) : 0{,}25$; б) $1 : 1\frac{7}{8} + \frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$;
в) $(-3)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3^3$.

К—1 *Вариант III*

1. Разложите на простые множители число:
а) 4680; б) 16 830; в) 14 641.

2. Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $2\frac{1}{8}$; б) $\frac{30}{13}$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(7); б) 0,(17);
в) 0,(045); г) 3,6(17).

4. Вычислите:

а) $2{,}2(7) + 4\frac{1}{6} \cdot (0{,}625 - 1{,}64 : 1{,}6)$;

б) $(0{,}5)^{20} \cdot 2^{21} + 3^7 \cdot 5^7 : 15^6$.

5. Сколько делителей имеет число 140?

К—1 *Вариант IV*

1. Разложите на простые множители число:

а) 7020; б) 17 680; в) 28 561.

2. Представьте в виде десятичной дроби число:

а) $3\frac{1}{4}$; б) $\frac{61}{41}$.

3. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(8); б) 0,(43);
в) 0,(027); г) 5,2(18).

4. Вычислите:

а) $(0{,}75 - 0{,}25 \cdot 4{,}2) : 0{,}2(45) + \frac{1}{3}$;

б) $(0{,}2)^{20} \cdot 5^{21} + 2^6 \cdot 5^6 : 10^5$.

5. Сколько делителей имеет число 150?

К—2 *Вариант I*

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $3a^2bc \cdot 6abc$;

б) $\left(-1\frac{2}{3}\right)b^2c^3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right)b^2c^2$.

2. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $a - 7a$; б) $7a + b^2 - 3a - 2b^2$; в) $3x - (2a - x)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель многочлена:

а) $12x - 6y$; б) $2ab - 6bc$; в) $9x^2 - 12x^2y^3$.

4. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $2x^2(x - 3y)$; б) $(2x - 3y)(3y + 2x)$;
в) $(a + b)(a - b)(a + b)$.

5. Разложите на множители:

а) $m(n - 3) + 2(n - 3)$;
б) $x - 2y - a(2y - x)$.

К–2 *Вариант II*

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

   а) $4a^3bc \cdot 3ab^2c$;

   б) $\left(-2\frac{2}{3}\right)b^3c^2 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)b^2c^2$.

2. Запишите многочлен в стандартном виде:

   а) $b - 8b$; б) $15x + 3y^2 - 8x + 3y^2$;
   в) $14b - (3a - 7b)$.

3. Вынесите за скобки общий множитель многочлена:

   а) $15a + 3b$; б) $14xy - 28ay$; в) $20a^5b^3 - 15b^4$.

4. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

   а) $3a(2 - b)$; б) $(5a - 6b)(6b - 5a)$;
   в) $(x - y)(x + y)(x - y)$.

5. Разложите на множители:

   а) $a(5 - b) + 7(5 - b)$;
   б) $7a - 4b - y(4b - 7a)$.

К–2 *Вариант III*

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

   а) $-4{,}5a^3bc \cdot 1{,}2ab^2c^3$;

   б) $\left(-3\frac{3}{4}\right)b^3c^2 \cdot \left(-\frac{8}{25}\right)b^2c^3$.

2. Упростите выражение
$$(x - 1)(x - 3)(x + 4) - (x + 1)(x + 3)(x - 4).$$

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

   а) $(x^2 - 3y)(3y + x^2)$; б) $(a^2 - b^2)(b^4 + a^2b^2 + a^4)$.

4. Разложите на множители:

   а) $12x^2y - 18xy^2$; б) $15a^4b^3 - 25a^3b^4$;
   в) $mn - 3m + 2n - 6$; г) $x^2 - xy - 2y^2$.

5. Докажите тождество
$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1.$$

К–2 *Вариант IV*

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

   а) $-3{,}5ab^3c^2 \cdot 1{,}6a^3bc$;

   б) $\left(-2\frac{3}{4}\right)b^4c^2 \cdot \left(-\frac{8}{33}\right)b^2c^4$.

2. Упростите выражение

$$(x-1)(x-2)(x+3)-(x+1)(x+2)(x-3).$$

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(2b+a^3)(a^3-2b)$; б) $(x^2+y^2)(y^4-x^2y^2+x^4)$.

4. Разложите на множители:

а) $16ab^3-20a^2b^2$; б) $18x^4y^2-12x^5y^3$;
в) $mn-2m+4n-8$; г) $x^2+3xy-4y^2$.

5. Докажите тождество

$$(x-1)(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^8-1.$$

К—3 *Вариант I*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(x-3)^2$; б) $(2a+5b)^2$;
в) $(a-2)(a+2)$; г) $(3x-y)(y+3x)$.

2. Разложите на множители:

а) $18ab^3-2a^3b$; б) $a^4+6a^2b+9b^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$2(5-y^2)(y^2+5)+(y^2-3)^2-(y^2+y-1)(4-y^2).$$

К—3 *Вариант II*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(n-2)^2$; б) $(2a+3b)^2$;
в) $(x-5)(x+5)$; г) $(4x-y)(y+4x)$.

2. Разложите на множители:

а) $(a+3b)^2-(3a-b)^2$; б) $a-b^2-b+a^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$3(2-x)^2-(2x^2+x-5)(x^2-2)+(x^2+4)(4-x^2).$$

К—3 *Вариант III*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(x^2-3y)^2$; б) $\left(2a^2+\frac{1}{3}b^3\right)^2$;

в) $(x^2-2y)(x^2+2y)$; г) $(3x-y)(y+3x)$.

2. Разложите на множители:

а) $(3a^2+2b)^2-(3a^2-b)^2$; б) $0{,}25a^4-3a^2b^2+9b^4$;

в) x^2-6x+5; г) $x^2+4xy-5y^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$4(4-y^2)(y^2+4)-(5-y^3)^2+(y^4+4y^2+16)(y^2-4).$$

4. Вычислите значение выражения при каждом значении x:

$$(x-1)(x-2)(x+3)-(x+1)(x+2)(x-3).$$

К–3 *Вариант IV*

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(n^2-2m)^2$; б) $\left(3a^3+\frac{1}{2}b^2\right)^2$;

в) $(x^3-2y)(x^3+2y)$; г) $\left(2x^2-\frac{1}{3}y\right)\left(2x^2+\frac{1}{3}y\right)$.

2. Разложите на множители:

а) $(2a^3-3b^2)^2-(2a^3+b^2)^2$; б) $\frac{1}{4}a^4+2a^2b^2+4b^4$;

в) x^2-5x+4; г) $x^2+6xy+8y^2$.

3. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

$$3(3-x^2)^2-(9-3x^2+x^4)(x^2+3)-3(x^2-x)(x^2+x).$$

4. Вычислите значение выражения при каждом значении x:

$$(x-1)(x-3)(x+4)-(x+1)(x+3)(x-4).$$

К–4 *Вариант I*

1. Сократите дробь:

а) $\frac{18x^3y}{24x^2y^4}$; б) $\frac{15a^2-10ab}{8b^2-12ab}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{1}{3c}+\frac{5}{c}$; б) $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}$;

в) $\frac{a}{2b^2}\cdot 6b$; г) $\frac{7m^2n}{8x}:\frac{21m}{20x^2y}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{m}{m-n}-\frac{m}{m+n}\right):\frac{16m^3n}{m^2-n^2}$;

б) $\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2x-y}-\frac{1}{y-2x}\right)-\frac{1}{xy^2}$.

К—4 *Вариант II*

1. Сократите дробь:

а) $\frac{24ab^2}{18a^4b^2}$; б) $\frac{10x^2-15xy}{12y^2-8xy}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{7}{x}+\frac{1}{4x}$; б) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$;

в) $3a\cdot\frac{5b}{3a^2}$; г) $\frac{3xy^2}{4a}:\frac{13y}{24a^2b}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{8x^2y^2}{x^2-y^2}:\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)$;

б) $\frac{1}{2xy^2}-\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{y-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)$.

К—4 *Вариант III*

1. Сократите дробь:

а) $\frac{10x^3-15ax^2}{21ax^3-14x^4}$; б) $\frac{x^2-4x+4}{5x^2-10x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{5}{3x}+\frac{2}{7x}$; б) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}$;

в) $7a^3\cdot\frac{3b}{14a^2}$; г) $\frac{12xy^2}{5a^3}:\frac{24y}{25a^2b}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(x^2+\frac{6-x^4}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1+x}{6-x^2}$; б) $\left(\frac{x+4}{3x+3}-\frac{1}{x+1}\right):\frac{1+x}{3}-\frac{2}{1-x^2}$.

4. Докажите тождество

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{4}{x(x+4)}.$$

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

К—4 *Вариант IV*

1. Сократите дробь:

а) $\frac{12a^3x-16a^2x^2}{20ax^3-15a^2x^2}$; б) $\frac{x^2-6x+9}{9x^2-27x}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{2}{5x}+\frac{5}{9x}$; б) $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}$;

в) $13a^2\cdot\frac{5b}{26a^3}$; г) $\frac{15x^2y}{7a^3}:\frac{18y}{35a^2b}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(x+\frac{6-x^2}{1+x}\right):\frac{6+x}{x^2-1}$; б) $\frac{1}{x-2}+\frac{4x}{4-x^2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}\right)$.

4. Докажите тождество

$$\frac{1}{(x-4)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)x}=\frac{4}{x(x-4)}.$$

При каких значениях x определены обе части данного тождества?

К—5 *Вариант I*

1. Вычислите:

а) $3^{-3}\cdot3^5$; б) $5^{-2}:5^{-3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^5\cdot a^{-2}}{a^{-3}}$; б) $(x^2)^{-3}\cdot x^4$.

3. Вычислите: $\frac{6^{-3}\cdot2^{-4}}{18^{-2}}$.

4. Найдите значение выражения

$$(a^{-1}+b^{-1})^2-4a^{-1}b^{-1}$$

при $a=\frac{1}{2000}$, $b=\frac{1}{1999}$.

5. Упростите выражение

$$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)^{-1}:\left(\frac{x-y}{2y}\cdot(2x)^{-1}\right).$$

К—5 *Вариант II*

1. Вычислите:

а) $2^{-4}\cdot2^6$; б) $3^{-2}:3^{-4}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^6\cdot a^{-4}}{a^{-2}}$; б) $(x^4)^{-2}\cdot x^5$.

3. Вычислите: $\frac{6^{-4}\cdot2^{-1}}{12^{-3}}$.

4. Найдите значение выражения

$$(a^{-1}-b^{-1})^2+4a^{-1}b^{-1}$$

при $a=\frac{1}{2000}$, $b=-\frac{1}{1999}$.

5. Упростите выражение

$$\left((ab)^{-1}\cdot\frac{(2ab)^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}.$$

К—5 *Вариант III*

1. Вычислите:

а) $5^{-8}\cdot5^{6}$; б) $8^{-7}:8^{-9}$; в) $25^{-4}:5^{-8}$.

2. Упростите выражение:

а) $(a^{-5})^3\cdot a^{14}$ $(a\neq0)$; б) $\frac{a^{-5}-a^{-6}}{a^{-4}-a^{-5}}$.

3. Вычислите: $\frac{81\cdot6^{-4}\cdot21^{-5}}{14^{-5}}$.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}+\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$$

при $a=2$, $b=1999$.

5. Упростите выражение

$$\left((ab)^{-2}\cdot\frac{(2ab)^3}{4a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a-b}{2a+b}-\frac{2a+b}{2a-b}\right)^{-1}.$$

К—5 *Вариант IV*

1. Вычислите:

а) $9^{8}\cdot9^{-10}$; б) $7^{-9}:7^{-7}$; в) $9^{-6}:3^{-12}$.

2. Упростите выражение:

а) $(x^{-6})^3\cdot x^{17}$ $(x\neq0)$; б) $\frac{x^{-5}-x^{-4}}{x^{-4}-x^{-3}}$.

3. Вычислите: $\frac{64\cdot25^{-3}\cdot14^{-7}}{35^{-6}}$.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}+\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$$

при $a=3$, $b=2000$.

5. Упростите выражение

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y}-\frac{x-2y}{x+2y}\right)^{-1}:\left(\frac{x-2y}{(2xy)^3}:(xy)^{-2}\right).$$

К–6 *Вариант I*

1. Решите уравнение
$$3x + 5 = 2x - 1.$$

2. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B, а угол C в 3 раза больше угла A. Вычислите величины углов треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

4. На двух полках стояло 210 книг. Если с первой полки убрать половину книг, а на второй увеличить их число вдвое, то на двух полках будет 180 книг. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

К–6 *Вариант II*

1. Решите уравнение
$$4x - 3 = 3x + 7.$$

2. В треугольнике ABC угол A в 3 раза больше угла B, а угол C в 2 раза больше угла A. Вычислите величины углов треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases}$

4. В двух коробках лежало 210 карандашей. Если в первой коробке число карандашей уменьшить вдвое, а во второй их число увеличить в 2 раза, то в двух коробках станет 240 карандашей. Сколько карандашей было в каждой коробке первоначально?

К–6 *Вариант III*

1. Решите уравнение
$$3(x - 2) - 5(x + 1) = -8x.$$

2. В треугольнике ABC угол A на $30°$ больше угла B, а угол C в 2 раза меньше угла A. Вычислите величины углов треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3x - 2y - z = -6, \\ 2x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$

4. Если раздать детям по 3 яблока, то 7 яблок останется, а чтобы раздать каждому по 5 яблок, не хватит 3 яблок. Сколько было детей?

К—6 *Вариант IV*

1. Решите уравнение

$$5(x-1)-3(x+2)=-5x.$$

2. В треугольнике ABC угол A на 50° больше угла C, а угол B в 2 раза меньше угла A. Вычислите величины углов треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-4y=-7, \\ 2x+5y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y-3z=0, \\ 3x+2y+z=2, \\ 2x+2y-5z=-5. \end{cases}$

4. Если раздать детям по 5 конфет, то 13 конфет останется, а чтобы раздать каждому по 8 конфет, не хватит 5 конфет. Сколько было детей?

К—7 *Вариант I*

1. Вычислите:

$$\frac{3{,}17^2-2\cdot3{,}17\cdot1{,}17+1{,}17^2}{6{,}75^2-3{,}25^2}.$$

2. Упростите выражение:

а) $(a-1)(a+3)-(a+1)^2$; б) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$.

3. Упростите выражение

$$\frac{x-2y}{x-3y}\cdot\left(\frac{x}{3x-6y}+\frac{y}{2y-x}\right).$$

4. Решите уравнение

$$(8x-3)(2x+1)=(4x-1)^2.$$

5. Сумма трёх чисел равна 90. Известно, что первое число на 10 меньше второго, а второе в 2 раза больше третьего. Найдите эти числа.

К—7 *Вариант II*

1. Вычислите:

$$\frac{5{,}15^2-2\cdot5{,}15\cdot3{,}15+3{,}15^2}{7{,}25^2-2{,}75^2}.$$

2. Упростите выражение:

а) $(x+1)^2-(x-2)(x+4)$; б) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{5}{2x-4y}-\frac{1}{2y-x}\right):\frac{3}{x-2y}.$$

4. Решите уравнение

$$(4x-5)(x+3)=(2x-3)^2.$$

5. Сумма трёх чисел равна 120. Известно, что второе число в 2 раза меньше первого, а третье на 20 больше второго. Найдите эти числа.

К–7 *Вариант III*

1. Вычислите:

$$\frac{3{,}25^2+6{,}5\cdot 1{,}75+1{,}75^2}{6{,}33^2-6{,}33\cdot 2{,}66+1{,}33^2}.$$

2. При каком значении a значение выражения

$$(x-a)(x+8)-(x+4)(x-1)$$

не зависит от x?

3. Упростите выражение

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

4. При каком значении d система уравнений

$$\begin{cases}2x-5y=8,\\8x+dy=10\end{cases}$$

не имеет решений?

К–7 *Вариант IV*

1. Вычислите:

$$\frac{2{,}45^2+4{,}9\cdot 3{,}55+3{,}55^2}{4{,}23^2-4{,}23\cdot 2{,}46+1{,}23^2}.$$

2. При каком значении a значение выражения

$$(x+a)(x-3)-(x-5)(x+3)$$

не зависит от x?

3. Упростите выражение

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}:(x^2-y^2)-\frac{2x}{x-y}+\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

4. При каком значении k система уравнений

$$\begin{cases}x+2y=5,\\5x+10y=k\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Дополнительные задачи к контрольным работам

К—1

1. У Алёши марок в 4 раза больше, чем у Бори, у которого на 36 марок меньше, чем у Алёши. Сколько марок у каждого?
2. У Ани открыток в 3 раза меньше, чем у Веры, у которой на 24 открытки больше, чем у Ани. Сколько открыток у каждой?
3. У Алёши марок в n раз больше, чем у Бори, у которого на m марок меньше, чем у Алёши. Сколько марок у каждого?
   а) Решите задачу в общем виде.
   б) Получите ответ при $n = 4$, $m = 450$.
4. У Ани открыток в p раз меньше, чем у Веры, у которой на q открыток больше, чем у Ани. Сколько открыток у каждой?
   а) Решите задачу в общем виде.
   б) Получите ответ при $p = 3$, $q = 60$.

К—2

5. На двух полках 40 книг. Если с первой полки переставить на вторую 4 книги, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на каждой полке?
6. В двух классах 56 учащихся. Если 3 ученика перейдут из одного класса в другой, то учащихся в этих классах станет поровну. Сколько учащихся в каждом классе?
7. На двух полках a книг. Если с первой полки переставить на вторую n книг, то на второй полке станет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько книг на каждой полке?
   а) Решите задачу в общем виде.
   б) Получите ответ при $a = 60$, $n = 6$.
8. В двух бригадах a рабочих. Если n рабочих перейдут из первой бригады во вторую, то в первой бригаде станет в 2 раза больше рабочих, чем во второй. Сколько рабочих в каждой бригаде?
   а) Решите задачу в общем виде.
   б) Получите ответ при $a = 48$, $n = 6$.

К—3

9. Брат старше сестры на 2 года, а через 3 года сумма их возрастов будет равна 34. Сколько лет каждому сейчас?

10. Сестра старше брата на 3 года, а 2 года назад сумма их возрастов была равна 25. Сколько лет каждому сейчас?

11. Брат старше сестры в n раз, а через a лет он будет старше сестры в $(n-1)$ раз. Сколько лет каждому сейчас?
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a=4$, $n=3$.

12. Сейчас отец в n раз старше сына, а через a лет он будет старше сына в $(n-2)$ раз. Сколько лет отцу сейчас?
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a=7$, $n=5$.

К–4

13. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 12 дней работы или второму цеху на 24 дня работы. Хватит ли этого сырья на 9 дней их совместной работы?

14. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 14 дней работы или второму цеху на 21 день работы. Хватит ли этого сырья на 8 дней их совместной работы?

15. Имеющегося сырья хватит первому цеху на a дней работы, или второму цеху на b дней работы, или третьему цеху на c дней работы. На сколько дней хватит этого сырья для совместной работы трёх цехов?
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a=21$, $b=24$, $c=28$.

16. Бассейн наполняется через первую трубу за a ч, через вторую трубу за b ч, через третью трубу за c ч. За сколько часов наполнится бассейн через три трубы при их совместной работе?
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a=9$, $b=12$, $c=18$.

К–5

17. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 2 кг, содержит 60 % олова, а второй, массой 3 кг, содержит 40 % олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный сплавлением этих двух кусков?

18. Имеется два куска сплава меди и серебра. Первый, массой 3 кг, содержит 60 % серебра, а второй, массой 2 кг, содержит 40 % серебра. Сколько процентов серебра будет содержать сплав, полученный сплавлением этих двух кусков?

19. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 2 кг, содержит 60 % олова, а второй содержит 40 % олова. Сколько килограммов второго сплава надо добавить к первому, чтобы получить сплав, содержащий 45 % олова?

20. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 3 кг, содержит 40 % олова, а второй содержит 60 % олова. Сколько килограммов второго сплава надо добавить к первому, чтобы получить сплав, содержащий 45 % олова?

К—6

21. Число увеличили на 20 %, полученный результат увеличили ещё на 20 %. На сколько процентов увеличили число за два раза?

22. Число уменьшили на 20 %, полученный результат уменьшили ещё на 20 %. На сколько процентов уменьшили число за два раза?

23. Число увеличили на 20 %, а полученный результат уменьшили на 20 %. Увеличилось или уменьшилось число после этих двух изменений? На сколько процентов?

24. Число уменьшили на 20 %, а полученный результат увеличили на 20 %. Увеличилось или уменьшилось число после этих двух изменений? На сколько процентов?

К—7

25. Два путника одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 3 ч. Через 2 ч после встречи первый путник пришёл в пункт B. Через сколько часов после встречи второй путник пришёл в пункт A?

26. Велосипедист и пешеход одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 2 ч. Через 1 ч после встречи велосипедист прибыл в пункт B. Через сколько часов после встречи пешеход пришёл в пункт A?

27. Задумали два числа, сумма которых равна a. Если первое число увеличить в 3 раза, а второе уменьшить в 4 раза, то сумма полученных чисел станет равна b. Найдите задуманные числа.
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a = 60$, $b = 70$.

28. Задумали два числа, сумма которых равна a. Если первое число увеличить в 4 раза, а второе уменьшить в 3 раза, то сумма полученных чисел станет равна b. Найдите задуманные числа.
а) Решите задачу в общем виде.
б) Получите ответ при $a = 50$, $b = 90$.

ОТВЕТЫ

Контрольные работы

К—1

В. I. **1.** а) $2^2 \cdot 97$; б) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. **2.** а) 3,4; б) 1,4(3). **3.** $0{,}3 < 0{,}(322) < 0{,}(32) < \frac{1}{3}$. **4.** а) 4,1; б) 0,82; в) −4.

В. II. **1.** а) $2^3 \cdot 47$; б) $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. **2.** а) 3,25; б) 1,3(6). **3.** $0{,}6 < \frac{2}{3} < 0{,}(67) < 0{,}(677)$. **4.** а) 5,1; б) $1\frac{7}{30}$; в) 12.

В. III. **1.** а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$; б) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$; в) 11^4. **2.** а) 2,125; б) 2,(307692). **3.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{17}{99}$; в) $\frac{5}{111}$; г) $3\frac{611}{990}$. **4.** а) $\frac{11}{18}$; б) 17. **5.** 12.

В. IV. **1.** а) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13$; б) $2^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$; в) 13^4. **2.** а) 3,25; б) 1,(48780). **3.** а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{43}{99}$; в) $\frac{1}{37}$; г) $5\frac{12}{55}$. **4.** а) $-\frac{8}{9}$; б) 15. **5.** 12.

К—2

В. I. **1.** а) $18a^3b^2c^2$; б) $\frac{2}{9}b^4c^5$. **2.** а) $-6a$; б) $4a - b^2$; в) $4x - 2a$. **3.** а) $6(2x - y)$; б) $2b(a - 3c)$; в) $3x^2(3 - 4y^3)$. **4.** а) $2x^3 - 6x^2y$; б) $4x^2 - 9y^2$; в) $a^3 - ab^2 + a^2b - b^3$. **5.** а) $(n - 3)(m + 2)$; б) $(x - 2y)(1 + a)$.

В. II. **1.** а) $12a^4b^3c^2$; б) $\frac{3}{2}b^5c^4$. **2.** а) $-7b$; б) $7x + 6y^2$; в) $21b - 3a$. **3.** а) $3(5a + b)$; б) $14y(x - 2a)$; в) $5b^3(4a^5 - 3b)$. **4.** а) $6a - 3ab$; б) $-25a^2 + 60ab - 36b^2$; в) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$. **5.** а) $(a + 7)(5 - b)$; б) $(7a - 4b)(1 + y)$.

В. III. **1.** а) $-5{,}4a^4b^3c^4$; б) $\frac{6}{5}b^5c^5$. **2.** 24. **3.** а) $x^4 - 9y^2$; б) $a^6 - b^6$. **4.** а) $6xy(2x - 3y)$; б) $5a^3b^3(3a - 5b)$; в) $(m + 2)(n - 3)$; г) $(x + y) \times$ $\times (x - 2y)$.

В. IV. **1.** а) $-5{,}6a^4b^4c^3$; б) $\frac{2}{3}b^6c^6$. **2.** 12. **3.** а) $a^6 - 4b^2$; б) $x^6 + y^6$. **4.** а) $4ab^2(4b - 5a)$; б) $6x^4y^2(3 - 2xy)$; в) $(n - 2)(m + 4)$; г) $(x + 4y) \times$ $\times (x - y)$.

К—3

В. I. **1.** а) $x^2 - 6x + 9$; б) $4a^2 + 20ab + 25b^2$; в) $a^2 - 4$; г) $9x^2 - y^2$. **2.** а) $2ab(3b - a)(3b + a)$; б) $(a^2 + 3b)^2$. **3.** $y^3 - 11y^2 - 4y + 63$.

В. II. **1.** а) $n^2 - 4n + 4$; б) $4a^2 + 12ab + 9b^2$; в) $x^2 - 25$; г) $16x^2 - y^2$. **2.** а) $4(2a + b)(2b - a)$; б) $(a - b)(a + b + 1)$. **3.** $-3x^4 - x^3 +$ $+ 12x^2 - 10x + 18$.

В. III. **1.** а) $x^4 - 6x^2y + 9y^2$; б) $4a^4 + \frac{4}{3}a^2b^3 + \frac{1}{9}b^6$; в) $x^4 - 4y^2$; г) $9x^2 - y^2$. **2.** а) $3b(6a^2 + b)$; б) $(0{,}5a^2 - 3b^2)^2$; в) $(x - 1)(x - 5)$; г) $(x + 5y)(x - y)$. **3.** $-4y^4 + 10y^3 - 25$. **4.** 12.

В. IV. **1.** а) $n^4 - 4n^2m + 4m^2$; б) $9a^6 + 3a^3b^2 + \frac{1}{4}b^4$; в) $x^6 - 4y^2$; г) $4x^4 - \frac{1}{9}y^2$. **2.** а) $8b^2(b^2 - 2a^3)$; б) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 2b^2\right)^2$; в) $(x - 1)(x - 4)$; г) $(x + 4y)(x + 2y)$. **3.** $-x^6 - 15x^2$. **4.** 24.

К—4

В. I. **1.** а) $\frac{3x}{4y^3}$; б) $-\frac{5a}{4b}$. **2.** а) $\frac{16}{3c}$; б) $\frac{2}{a^2-1}$; в) $\frac{3a}{b}$; г) $\frac{5mnxy}{6}$. **3.** а) $\frac{1}{8m^2}$; б) $-\frac{1}{2x^2y}$.

В. II. **1.** а) $\frac{4}{3a^3}$; б) $\frac{-5}{4y}$. **2.** а) $\frac{29}{4x}$; б) $\frac{4}{x^2-4}$; в) $\frac{5b}{a}$; г) $\frac{18abxy}{13}$. **3.** а) $4xy$; б) $\frac{1-4x+4y}{2xy^2}$.

В. III. **1.** а) $-\frac{5}{7x}$; б) $\frac{x-2}{5x}$. **2.** а) $\frac{41}{21x}$; б) $\frac{6}{x^2-9}$; в) $\frac{3ab}{2}$; г) $\frac{5bxy}{2a}$. **3.** а) $\frac{1}{x-1}$; б) $\frac{1}{x-1}$.

В. IV. **1.** а) $-\frac{4a}{5x}$; б) $\frac{x-3}{9x}$. **2.** а) $\frac{43}{45x}$; б) $\frac{8}{x^2-16}$; в) $\frac{5b}{2a}$; г) $\frac{25bx^2}{6a}$. **3.** а) $x-1$; б) $\frac{1}{x+2}$.

К—5

В. I. **1.** а) 9; б) 5. **2.** а) a^6; б) x^{-2}. **3.** $\frac{3}{32}$. **4.** 1. **5.** 1.

В. II. **1.** а) 4; б) 9. **2.** а) a^4; б) x^{-3}. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** 1. **5.** -1.

В. III. **1.** а) $\frac{1}{25}$; б) 64; в) 1. **2.** а) $\frac{1}{a}$; б) $\frac{1}{a}$. **3.** $\frac{2}{243}$. **4.** 1. **5.** -1.

В. IV. **1.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{1}{49}$; в) 1. **2.** а) $\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{x}$. **3.** $\frac{1}{14}$. **4.** $\frac{2}{3}$. **5.** 1.

К—6

В. I. **1.** -6. **2.** 20°, 40°, 120°. **3.** а) (3; -1); б) (2; 1). **4.** 160 и 50 книг.

В. II. **1.** 10. **2.** 18°, 54°, 108°. **3.** а) (2; 1); б) (3; 1). **4.** 120 и 90 карандашей.

В. III. **1.** $\frac{11}{6}$. **2.** 84°, 54°, 42°. **3.** а) (1; -1); б) (-1; 1; 1). **4.** 5 детей.

В. IV. **1.** $\frac{11}{7}$. **2.** 92°, 46°, 42°. **3.** а) (-1; 1); б) (1; -1; 1). **4.** 6 детей.

К—7

В. I. **1.** $\frac{4}{35}$. **2.** а) -4; б) x^4-y^4. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 0,4. **5.** 30, 40, 20.

В. II. **1.** $\frac{4}{45}$. **2.** а) 9; б) a^4-b^4. **3.** $\frac{7}{6}$. **4.** $\frac{24}{19}$. **5.** 50, 25, 45.

В. III. **1.** 1. **2.** При $a=5$. **3.** 1. **4.** При $d=-20$.

В. IV. **1.** 4. **2.** При $a=1$. **3.** -1. **4.** При $k=25$.

Дополнительные задачи к контрольным работам

1. 48 и 12 марок. **2.** 12 и 36 открыток. **3.** а) $\frac{mn}{n-1}$ и $\frac{m}{n-1}$; б) 600 и 150 марок. **4.** а) $\frac{q}{p-1}$ и $\frac{pq}{p-1}$; б) 30 и 90 открыток. **5.** 24 и 16 книг. **6.** 31 и 25 учащихся. **7.** а) $\frac{a}{3}+n$ и $\frac{2a}{3}-n$; б) 26 и 34 книги. **8.** а) $\frac{2a}{3}+n$ и $\frac{a}{3}-n$; б) 38 и 10 рабочих. **9.** 15 и 13 лет. **10.** 16 и 13 лет. **11.** а) $an(n-2)$ и $a(n-2)$; б) 12 лет и 4 года. **12.** а) $\frac{a(n^2-3n)}{2}$

и $\frac{a(n-3)}{2}$; б) 35 и 7 лет. **13.** Нет. **14.** Да. **15.** а) $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; б) на 8 дней. **16.** а) $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; б) за 4 ч. **17.** 48 %. **18.** 52 %. **19.** 6 кг. **20.** 1 кг. **21.** На 44 %. **22.** На 36 %. **23.** Уменьшилось на 4 %. **24.** Уменьшилось на 4%. **25.** Через 4,5 ч. **26.** Через 4 ч. **27.** а) $\frac{4b-a}{11}$ и $\frac{12a-4b}{11}$; б) 20 и 40. **28.** а) $\frac{3b-a}{11}$ и $\frac{12a-3b}{11}$; б) 20 и 30.

Содержание